

PŘÍKLADY K MATEMATICE 3

ZDENĚK ŠIBRAVA

1. KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY

1.1. Křivkový integrál prvního druhu.

Příklad 1.1. Vypočítejme křivkový integrál $\int_C \frac{1}{x-y} ds$, kde C je úsečka AB , $A = (0, -2)$, $B = (4, 0)$.

Řešení: Úsečka AB je hladká křivka. Funkce

$$\psi(t) = (4t, -2 + 2t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

je parametrizace křivky C . Protože

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt,$$

je potom

$$\begin{aligned} \int_C \frac{ds}{x-y} &= \int_0^1 \frac{1}{4t - (-2 + 2t)} \sqrt{4^2 + 2^2} dt = \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = \sqrt{5} [\ln |t+1|]_0^1 = \sqrt{5} \ln 2. \end{aligned}$$

Příklad 1.2. Vypočítejme křivkový integrál $\int_C (x+y) ds$, kde C je obvod trojúhelníku ABC , $A = (0, 1)$, $B = (2, 1)$, $C = (0, 3)$.

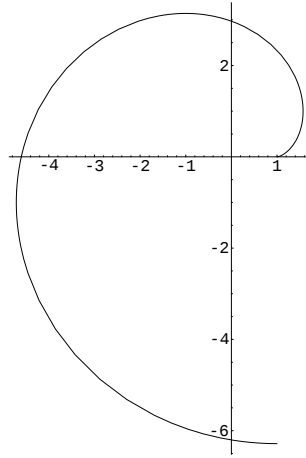
Řešení: C není hladká křivka, ale vznikne spojením tří na sebe navazujících křivek C_1, C_2, C_3 (stran trojúhelníku ABC), kde

$$\begin{aligned} C_1 : \quad & x = 0 + 2t, \quad y = 1 + 0 \cdot t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ C_2 : \quad & x = 2 - 2t, \quad y = 1 + 2t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ C_3 : \quad & x = 0 + 0 \cdot t, \quad y = 1 + 2t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} \int_C (x+y) ds &= \int_0^1 (2t+1)2 dt + \int_0^1 ((2-2t) + (1+2t)) \sqrt{8} dt + \\ &+ \int_0^1 (2t+1)2 dt = 8 + 3\sqrt{8}. \end{aligned}$$

Příklad 1.3. Vypočítejme křivkový integrál $\int_C x^2 ds$, kde C je graf funkce $f(x) = \ln x$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$.



Obr. 1

Řešení: Položíme-li $x = t$, potom $y = \ln t$ je $\psi(t) = (t, \ln t)$, $t \in \langle 1, 2 \rangle$ parametrizace křivky C . Potom

$$\int_C x^2 ds = \int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^2 t \sqrt{t^2 + 1} dt.$$

Označíme-li $u = t^2 + 1$ a dále $du = 2t dt$ dostaneme

$$\int_1^2 t \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \int_2^5 \sqrt{u} du = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}).$$

Příklad 1.4. Vypočítejme křivkový integrál $\int_C (x^2 + y^2) ds$, kde C je křivka (Obr. 1 pro $a = 1$) s parametrizací

$$\psi(t) = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t)), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad (a > 0).$$

Řešení: Předně je

$$\psi'(t) = (at \cos t, at \sin t) \quad \text{a} \quad \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{(at)^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = at.$$

Potom

$$\int_C (x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} a^2 ((\cos t + t \sin t)^2 + (\sin t - t \cos t)^2) at dt = 2a^3 \pi^2 (1 + 2\pi^2).$$

Příklad 1.5. Vypočítejme křivkový integrál $\int_C (2\sqrt{x^2 + y^2} - z) ds$, kde C je křivka (jeden „závit“ kuželové šroubovice) s parametrizací

$$\psi(t) = (t \cos t, t \sin t, t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Řešení: Opět nejříve vypočítáme

$$\psi'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1) \quad \text{a} \quad \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \sqrt{2 + t^2}.$$

Potom

$$\begin{aligned} \int_C \left(2\sqrt{x^2 + y^2} - z \right) ds &= \int_0^{2\pi} \left(2\sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} - t \right) \sqrt{2 + t^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{3} \left(\sqrt{(2 + 4\pi^2)^3} - 2\sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

V příkladech 1.6 – 1.15 vypočítejte křivkové integrály podél křivky C .

Příklad 1.6. $\int_C \frac{x+2y+2}{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, kde C je úsečka s krajními body $(1, -1)$, $(4, 0)$.

Výsledek: $\sqrt{5}(2\sqrt{2} - 1)$.

Příklad 1.7. $\int_C xy ds$, kde C je obvod obdélníku určeného přímkami $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 2$.

Výsledek: 24

Příklad 1.8. $\int_C \frac{x^2}{y} ds$, kde C je část paraboly $y^2 = 2x$, $y \in \langle \sqrt{2}, 2 \rangle$.

Výsledek: $(25\sqrt{5} - 6\sqrt{3})/30$

Příklad 1.9. $\int_C x^2 y ds$, kde C je oblouk kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) s koncovými body $(a, 0)$, $(0, a)$.

Výsledek: $a^4/3$

Příklad 1.10. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kde C je kružnice $x^2 + y^2 - ax = 0$ ($a > 0$).

Výsledek: $2a^2$

Příklad 1.11. $\int_C |y| ds$, kde C je lemniskáta $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($a > 0$).

Výsledek: $2a^2(2 - \sqrt{2})$

Příklad 1.12. $\int_C \sqrt{2y} ds$, kde C část cykloidy s parametrizací

$\psi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ($a > 0$).

Výsledek: $4\pi a^{3/2}$

Příklad 1.13. $\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$, kde C je šroubovice $\psi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Výsledek: $8\pi^3\sqrt{2}/3$

Příklad 1.14. $\int_C x^2 ds$, kde C je průniková křivka ploch $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - z = 0$.

Výsledek: $\pi/2$

Příklad 1.15. $\int_C (x + y) ds$, kde C je část kružnice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x$ ($a > 0$), ležící v prvním oktantu.

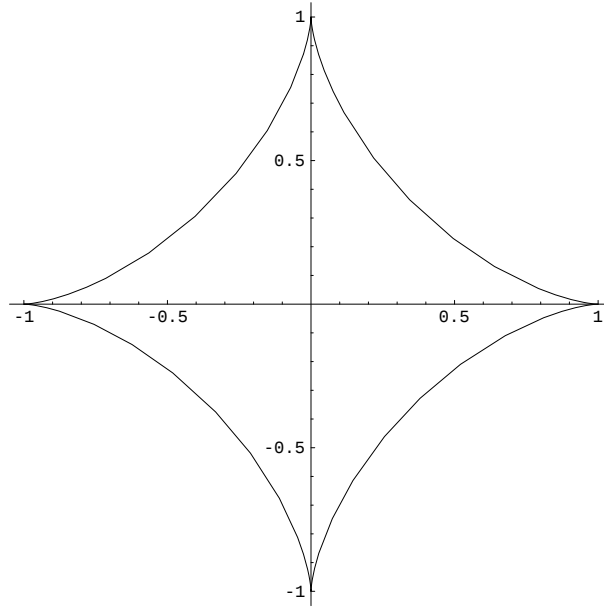
Výsledek: $\sqrt{2}a^2$

Aplikace křivkového integrálu prvního druhu

Geometrické aplikace

(I) Nechť C je jednoduchá křivka. Potom délka této křivky je dána vztahem

$$(1) \quad \int_C ds.$$



Obr. 2

(II) Nechť C je jednoduchá rovinná křivka (v rovině xy), f je spojitá funkce dvou proměnných nezáporná v bodech křivky C a

$$\kappa = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

je válcová plocha (určená řídicí křivkou C s přímkami rovnoběžnými s osou z , zdola omezená křivkou C a shora průnikem grafu funkce $z = f(x, y)$ a plochy κ). Potom pro obsah S válcové plochy κ platí

$$(2) \quad S = \int_C f(x, y) \, ds.$$

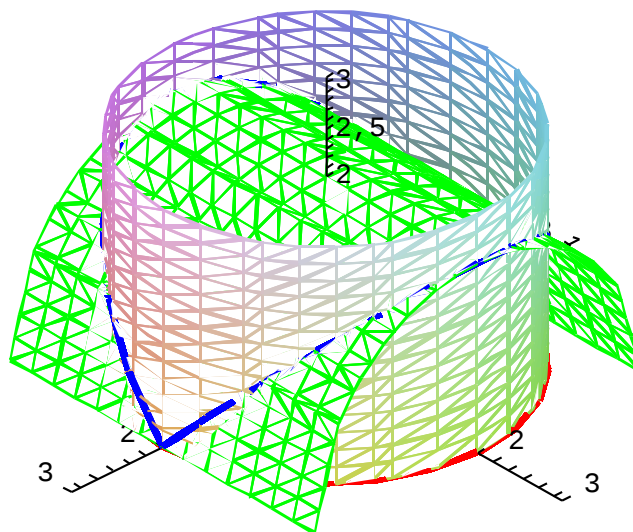
Příklad 1.16. Vypočítejme délku asteroidy C jejíž parametrizace je $\psi(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ $a > 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Řešení: Asteroida není hladká křivka, neboť v bodech $(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$, $(0, -a)$ k ní neexistuje tečný vektor. Platí totiž

$$\psi'(t) = (-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t),$$

a např. pro $t = 0$ je $\psi(0) = (a, 0)$ a $\psi'(0) = (0, 0)$, tj. v bodě $(a, 0)$ neexistuje tečný vektor. Analogicky je tomu i v ostatních uvedených bodech. V těchto bodech jsou na křivce body vratu (Obr. 2 pro $a = 1$).

Křivku C tedy budeme uvažovat jako spojení čtyř jednoduchých křivek, které na sebe navazují. Protože funkce $F(x, y) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{a^2}$ je sudá v proměnné x i v proměnné y , je zřejmé, že křivka C je souměrná podle osy y i podle osy x a k výpočtu její délky stačí vypočítat pouze délku její části C_1 ležící v první kvadrantu a její délku pak násobit čtyřmi.



Obr. 3

Nejdříve určíme

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 3a\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} = 3a \cos t \sin t.$$

Odtud

$$\int_C ds = 4 \int_{C_1} ds = 4 \int_0^{\pi/2} 3a \cos t \sin t dt = 12a \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 6a.$$

Příklad 1.17. Vypočítejme obsah válcové plochy (Obr.3)

$$\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2} \right\}.$$

Řešení:

Podle (2) je obsah válcové plochy roven číslu

$$\int_C f(x, y) ds,$$

kde C je její řídící křivka a plocha je zdola omezena rovinou $z = 0$ a shora grafem funkce $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$.

Křivka C (kružnice) je parametrizována funkcí $\psi(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Potom $\psi'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ a odtud

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{4 - x^2} ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - 4 \cos^2 t} 2 dt = 4 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t} dt = 4 \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi} \sin t dt + 4 \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t) dt = 4 \left([-\cos t]_0^{\pi} + [\cos t]_{\pi}^{2\pi} \right) = 16. \end{aligned}$$

Příklad 1.18. Vypočítejte délku křivky C s parametrizací $\psi(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$, jejímiž krajními body jsou $(0, 0, 0)$, $(3, 3, 2)$. **Výsledek:** 5

Příklad 1.19. Vypočítejte délku křivky C s parametrizací $\psi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. **Výsledek:** $\sqrt{3}(e - 1)$

V příkladech 1.20 – 1.27 vypočítejte obsahy daných válcových ploch.

Příklad 1.20. $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{9x^2}{4} + \frac{4y^2}{9}} \right\}$. **Výsledek:** 13π

Příklad 1.21. $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{4x^2 + \frac{y^2}{4}} \right\}$. **Výsledek:** 5π

Příklad 1.22. $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{1}{2}x^2 \wedge 0 \leq z \leq x + \sqrt{2y} \wedge x \in \langle 0, 1 \rangle \right\}$. **Výsledek:** $2(2\sqrt{2} - 1)/3$

Příklad 1.23. $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{1}{3}x^3 \wedge 0 \leq z \leq x^3 + 3y \wedge x \in \langle 0, 1 \rangle \right\}$. **Výsledek:** $(2\sqrt{2} - 1)/3$

Příklad 1.24. $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2\sqrt{x} \wedge 0 \leq z \leq \frac{y}{x+1} \wedge x \in \langle 0, 3 \rangle \right\}$. **Výsledek:** 4

Příklad 1.25. $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{2y} \wedge 0 \leq z \leq \frac{x}{2y+1} \wedge y \in \langle 0, 4 \rangle \right\}$. **Výsledek:** 2

Příklad 1.26. $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \ln x \wedge 0 \leq z \leq \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \wedge x \in \langle 1, e \rangle \right\}$. **Výsledek:** $1/2$

Příklad 1.27. $\kappa = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sin x \wedge 0 \leq z \leq \frac{y \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} \wedge x \in \langle 0, \pi/2 \rangle \right\}$. **Výsledek:** $1/2$

Fyzikální aplikace

Nechť C je jednoduchá hmotná křivka, jejíž hustota v každém jejím bodě (x, y, z) je $h(x, y, z)$.

(I) Hmotnost m této křivky je

$$(3) \quad m = \int_C h(x, y, z) \, ds$$

(II) Statický moment této křivky vzhledem k rovině xy , resp. vzhledem k rovině xz , resp. vzhledem k rovině yz je

$$(4) \quad S_{xy} = \int_C zh(x, y, z) \, ds, \quad S_{xz} = \int_C yh(x, y, z) \, ds, \quad S_{yz} = \int_C xh(x, y, z) \, ds.$$

(III) Souřadnice těžiště této křivky (v pravoúhlém souřadnicovém systému) jsou

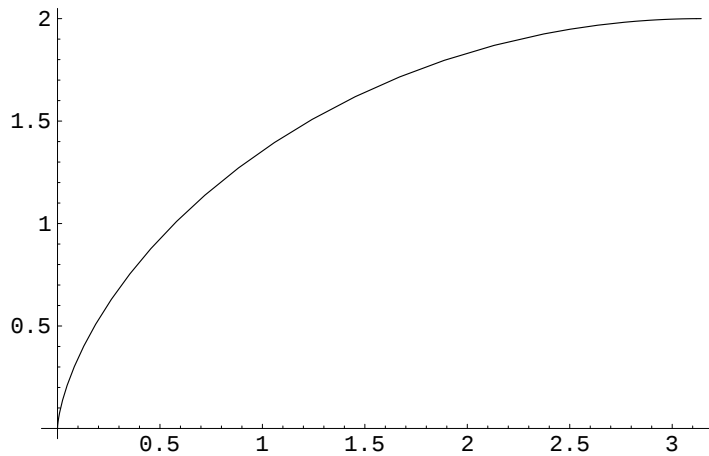
$$(5) \quad x_T = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_T = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_T = \frac{S_{xy}}{m}.$$

(IV) Moment setrvačnosti této křivky vzhledem k ose x , resp. vzhledem k ose y , resp. vzhledem k ose z je

$$(6) \quad \begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2) h(x, y, z) \, ds, \\ I_y &= \int_C (x^2 + z^2) h(x, y, z) \, ds, \\ I_z &= \int_C (x^2 + y^2) h(x, y, z) \, ds. \end{aligned}$$

V případě rovinné křivky platí všechny uvedené vztahy s tím, že $z = 0$.

Příklad 1.28. Vypočítejme souřadnice těžiště homogenní křivky, jejíž parametrizace je $\psi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ (část cykloidy, Obr. 4).



Obr. 4

Řešení: Podobně jako u ploch a těles budeme i u homogenních křivek předpokládat, že hustota v každém bodě křivky je 1. Souřadnice těžiště jsou na této konstantě nezávislé.

Je

$$\psi'(t) = (1 - \cos t, \sin t) \quad \text{a} \quad \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2 \sin \frac{t}{2}.$$

Potom

$$m = \int_C ds = \int_0^\pi 2 \sin \frac{t}{2} \, dt = 4 \left[-\cos \frac{t}{2} \right]_0^\pi = 4.$$

Dále

$$\begin{aligned} S_x &= \int_C y \, ds = \int_0^\pi 2(1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} \, dt = 4 \int_0^\pi \frac{1 - \cos t}{2} \sin \frac{t}{2} \, dt = \\ &= 4 \int_0^\pi \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} \, dt = 4 \int_0^\pi \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} \, dt = 8 \int_0^1 (1 - u^2) \, du = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

(při výpočtu integrálu volíme substituci $u = \cos \frac{t}{2}$) a

$$S_y = \int_C x \, ds = \int_0^\pi 2(t - \sin t) \sin \frac{t}{2} \, dt = 2 \left(\int_0^\pi t \sin \frac{t}{2} \, dt - \int_0^\pi \sin t \sin \frac{t}{2} \, dt \right) = \frac{16}{3}.$$

(První integrál počítáme metodou per partes, ve druhém po úpravě $\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$ volíme substituci $u = \sin \frac{t}{2}$.)

Je tedy

$$x_t = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{3}, \quad y_t = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{3}.$$

Příklad 1.29. Vypočítejte hmotnost části elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, jestliže její hustota je v každém bodě $h(x, y) = xy$. **Výsledek:** $38/5$

Příklad 1.30. Vypočítejte hmotnost jednoho závitu šroubovice s parametrizací $\psi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ($a > 0, b > 0$), jestliže její hustota v každém bodě je rovna druhé mocnině vzdálenosti tohoto bodu od počátku, tj. $h(x, y, z) = r^2$.

Výsledek: $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}(3a^2 + 4\pi^2 b^2)/3$

Příklad 1.31. Vypočítejte hmotnost křivky C s parametrizací $\psi(t) = (1, t, t^2/2)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, jestliže její hustota v každém bodě je $h(x, y, z) = \sqrt{2z}$.

Výsledek: $(2\sqrt{2} - 1)/3$

Příklad 1.32. Vypočítejte hmotnost drátu, který má tvar kružnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + z = 0$, je-li jeho hustota $h(x, y, z) = x^2$.

Výsledek: $\pi/2$

Příklad 1.33. Najděte souřadnice těžiště homogenního oblouku cykloidy s parametrizací $\psi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ($a > 0$).

Výsledek: $(a\pi, 4a/3)$

Příklad 1.34. Najděte souřadnice těžiště homogenního obvodu sférického trojúhelníku $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ ($a > 0$).

Výsledek: $(4a/(3\pi), 4a/(3\pi), 4a/(3\pi))$

Příklad 1.35. Drát má tvar kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$). Vypočítejte jeho moment setrvačnosti vzhledem k jeho průměru, je-li jeho hustota $h(x, y) = |x| + |y|$.

Výsledek: $4a^3$

Příklad 1.36. Vypočítejte momenty setrvačnosti vzhledem k souřadnicovým osám jednoho závitu homogenní šroubovice s parametrizací $\psi(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Výsledek: $I_x = I_y = \sqrt{5}\pi(1 + 32\pi/3)$, $I_z = 2\sqrt{5}\pi$

1.2. Křivkový integrál druhého druhu.

Příklad 1.37. Nechť $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$ je vektorové pole a C kladně orientovaná hladká křivka s parametrizací $\boldsymbol{\psi}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Vypočítejme křivkový integrál druhého druhu $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$.

Řešení: Připomeňme si nejdříve několik skutečností, které při výpočtu integrálu použijeme.

Je-li $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ vektorové pole, C hladká orientovaná křivka s parametrizací $\boldsymbol{\psi}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$ ($\mathbf{T}$ je její tečný vektor), potom

$$(7) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_C P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz.$$

Užitím věty o substituci dostaneme

$$(8) \quad \begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_C (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \\ &+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) \, dt. \end{aligned}$$

Připomeňme ještě, že v případě rovinného vektorového pole (7) i (8) platí, s tím, že R a z jsou nulové.

Nyní se vrátíme k našemu příkladu. Protože $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$, budeme podle (7) počítat integrál

$$\int_C (y^2 - z^2) \, dx + 2yz \, dy - x^2 \, dz,$$

a protože

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (t, t^2, t^3) \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\psi}'(t) = (1, 2t, 3t^2),$$

je podle (8)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_0^1 (t^4 - t^6 + 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2) \, dt = \frac{1}{35}.$$

Příklad 1.38. Vypočítejme křivkový integrál $\int_C (x^2 - 2xy) \, dx + (y^2 - 2xy) \, dy$, kde C je parabola $y = x^2$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$ s počátečním bodem $(-1, 1)$ a koncovým bodem $(1, 1)$.

Řešení: Křivkový integrál je zadán ve tvaru (7) a $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ je rovinné vektorové pole. Označíme-li $x(t) = t$ a $y(t) = t^2$ je $\boldsymbol{\psi}(t) = (t, t^2)$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$ parametrizací křivky C . Protože $(-1, 1)$ je počátečním bodem a $(1, 1)$ koncovým bodem křivky, je křivka při zvolené parametrizaci orientována kladně (je orientována ve směru rostoucího parametru). Dále $\boldsymbol{\psi}'(t) = (1, 2t)$ a podle (8)

$$\int_C (x^2 - 2xy) \, dx + (y^2 - 2xy) \, dy = \int_{-1}^1 ((t^2 - 2t^3) + (t^4 - 2t^3) \cdot 2t) \, dt = -\frac{14}{15}.$$

Příklad 1.39. Vypočítejte křivkový integrál $\int_C (2-y) dx + (1+x) dy$, kde C je obvod trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ a orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů.

Řešení: Křivka C není hladká. Vznikne spojením tří na sebe navazujících křivek (úseček – stran trojúhelníka) C_1 , C_2 a C_3 s parametrizacemi

$$\begin{aligned} C_1 : \quad \psi(t) &= (t, t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \text{kladně orientovaná,} \\ C_2 : \quad \psi(t) &= (t, 2-t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \text{záporně orientovaná,} \\ C_3 : \quad \psi(t) &= (0, t), \quad t \in \langle 0, 2 \rangle, \quad \text{záporně orientovaná.} \end{aligned}$$

Potom

$$\int_C (2-y) dx + (1+x) dy = \int_0^1 (2-t+1+t) dt - \int_0^1 (2-2+t-1-t) dt - \int_0^2 (1) dt = 2.$$

V příkladech 1.40 – 1.47 vypočítejte křivkové integrály podél křivky C .

Příklad 1.40. $\int_C y dx + x dy$, kde C je čtvrtkružnice $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ ($a > 0$) s počátečním bodem $(a, 0)$ a koncovým bodem $(0, a)$. **Výsledek:** 0

Příklad 1.41. $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, kde C je křivka $y = 1 - |1 - x|$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$ s počátečním bodem $(0, 0)$. **Výsledek:** 4/3

Příklad 1.42. $\int_C (x^2 + y^2) dy$, kde křivka C je obvod obdelníku s vrcholy $(2, 2)$, $(5, 2)$, $(5, 4)$, $(2, 4)$ orientovaná souhlasně s uvedeným pořadím vrcholů. **Výsledek:** 42

Příklad 1.43. $\int_C \frac{y}{x} dx + x dy$, kde křivka C je část hyperboly $xy = 1$ s počátečním bodem $(3, 1/3)$ a koncovým bodem $(1/2, 2)$. **Výsledek:** $\ln 6 - 5/3$

Příklad 1.44. $\int_C (2y - 6xy^3) dx + (2x - 9x^2y^2) dy$, kde
a) C je parabola $y = x^2$ s počátečním bodem $(0, 0)$ a koncovým bodem $(1, 1)$,
b) C je úsečka s počátečním bodem $(0, 0)$ a koncovým bodem $(1, 1)$. **Výsledek:** a) -1 , b) -1

Příklad 1.45. $\int_C yz dx + z\sqrt{a^2 - x^2} dy + yx dz$, kde C křivka s parametrizací $\psi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ($a > 0, b > 0$) s počátečním bodem $(a, 0, 0)$ a koncovým bodem $(a, 0, 2\pi b)$. **Výsledek:** $-\pi^2 a^2 b$

Příklad 1.46. $\int_C (x + y + z) dx$, kde křivka C je obvod trojúhelníku s vrcholy $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ orientovaná souhlasně s uvedeným pořadím vrcholů. **Výsledek:** 0

Příklad 1.47. $\int_C y dx + z dy + x dz$, kde C je průniková křivka ploch $z = xy$ a $x^2 + y^2 = 1$ orientovaná souhlasně s pořadím bodů $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$. **Výsledek:** $-\pi$

Aplikace křivkového integrálu druhého druhu

Fyzikální aplikace

Příklad 1.48. Vypočítejme práci silového pole $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, kterou vykoná posunutím hmotného břemene z bodu $(-1, 0, e^\pi)$ do bodu $(1, 0, 1)$ podél křivky C s parametrizací $\psi(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$.

Řešení: Připomeňme, že práce W silového pole $\mathbf{F}$ podél křivky C je

$$(9) \quad W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_C P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz.$$

Křivka C je parametrizována funkcí $\psi(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ a je $\psi(0) = (1, 0, 1)$ a $\psi(\pi) = (-1, 0, e^\pi)$. Protože C je parametrizována spojitou funkcí, je $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Po křivce však postupujeme proti rostoucímu parametru, tj. křivka je orientována záporně, a to znamená, že u počítaného křivkového integrálu musíme změnit znaménko. Pro práci silového pole $\mathbf{F}$ podél křivky C tedy dostáváme

$$W = - \int_0^\pi (-\sin^2 t + e^t \cos t + e^t \cos t) \, dt = 1 + e^\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 1.49. Vypočítejme tok rovinného vektorového pole $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, -2xy)$ uzavřenou kladně orientovanou křivkou C (kružnicí) $x^2 + y^2 = 2x$.

Řešení: Podobně jako v předchozím příkladu nejdříve připomeňme, že tok rovinného vektorového pole $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ uzavřenou kladně orientovanou křivkou C je ($\mathbf{n}$ je vnější normála křivky)

$$(10) \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_C -Q(x, y) \, dx + P(x, y) \, dy.$$

(Symbolem $\oint$ zdůrazňujeme, že počítáme křivkový integrál přes uzavřenou křivku.)

Pro nalezení toku vektorového pole křivkou C budeme tedy počítat

$$\oint_C -Q(x, y) \, dx + P(x, y) \, dy = \oint_C 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy.$$

Kružnici $x^2 + y^2 = 2x$ můžeme parametrizovat funkcí $\psi(t) = (1 + \cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Potom

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_0^{2\pi} (2(1 + \cos t) \sin t (-\sin t) + 2(1 + \cos t) \cos t) \, dt = 0.$$

Příklad 1.50. Vypočítejme cirkulaci rovinného vektorového pole

$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$, podél uzavřené kladně orientované hranice půlkruhu $x^2 + y^2 \leq 2x$, $y \geq 0$.

Řešení: Cirkulace vektorového pole $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ podél uzavřené kladně orientované křivky C je dána křivkovým integrálem

$$(11) \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \oint_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy.$$

V našem případě hranice půlkruhu není hladká křivka. Vznikne však spojením dvou na sebe navazujících křivek C_1 , tj. půlkružnice $x^2 + y^2 = 2x$, $y \geq 0$, a C_2 , tj. úsečky spojující body $(0, 0)$ a $(2, 0)$. Je tedy

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

Křivku C_1 budeme parametrizovat funkcí $\psi(t) = (1 + \cos t, \sin t)$, $t \in \langle 1, \pi \rangle$ a křivku C_2 funkcí $\psi(t) = (t, 0)$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$, přičemž obě křivky jsou orientovány shodně s rostoucím parametrem, tedy kladně. Potom

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_0^\pi (\sin^2 t - \cos t - 1) \sin t \, dt + \int_0^2 t^2 \, dt = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 2.$$

Příklad 1.51. Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole $\mathbf{F}(x, y) = (0, x^2)$ podél křivky $y^2 = 1 - x$ s počátečním bodem $(0, 1)$ a koncovým bodem $(1, 0)$.

Výsledek: $-8/15$

Příklad 1.52. Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, 2x)$ podél kladně orientované kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$).

Výsledek: πa^2

Příklad 1.53. Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ podél lomené čáry spojující body $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ orientované souhlasně s uvedeným pořadím bodů.

Výsledek: $3/2$

Příklad 1.54. Na hmotný bod, který se pohybuje po elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ($a > 0, b > 0$) z bodu $(a, 0)$ do bodu $(0, b)$ působí síla, jejíž velikost je rovna vzdálenosti bodu od středu elipsy, a která směřuje do středu této elipsy. Vypočítejte práci, kterou pole vykoná při pohybu bodu.

Výsledek: $(a^2 - b^2)/2$

Příklad 1.55. Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ podél průnikové křivky ploch $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $x + z = 0$ orientované souhlasně s pořadím bodů $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$, $(0, 1, 0)$, $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

Výsledek: 0

V příkladech 1.57 – 1.59 vypočítejte tok, resp. cirkulaci daného vektorového pole křivkou, resp. podél uzavřené křivky C .

Příklad 1.56. $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ a C je kladně orientovaná hranice množiny $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leq \sqrt[3]{a^2}$ ($a > 0$) (viz příklad 1.16), $x \geq 0, y \geq 0$.

Výsledek: $3a^2\pi/10$, resp. 0

Příklad 1.57. $\mathbf{F}(x, y) = (\frac{x-1}{r^2}, \frac{y+1}{r^2})$ (r je vzdálenost bodu (x, y) od počátku) a C je kladně orientovaná kružnice $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

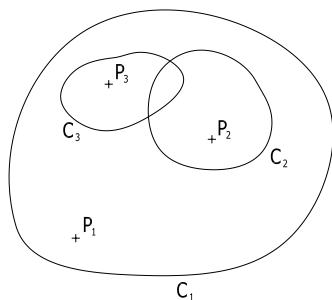
Výsledek: 2π , resp. 0

Příklad 1.58. $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, 2x)$ a C kladně orientované kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$).

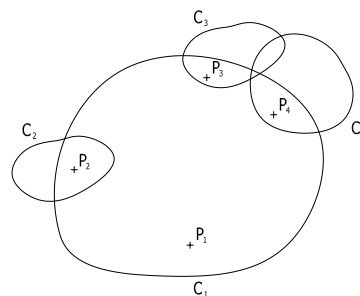
Výsledek: πa^2 , resp. πa^2

Příklad 1.59. $\mathbf{F}(x, y) = (xe^y, e^y)$ a C je kladně orientovaná hranice množiny $y^2 \leq x, x \leq 4$.

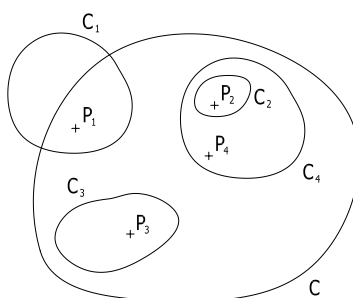
Výsledek: $-76e^{-2} - 4e^2$, resp. $16e^{-2} + 4e^2$



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Příklad 1.60. Pole $\mathbf{F}$ je nestlačitelné a je definováno všude s výjimkou bodů P_1 , P_2 a P_3 (Obr. 5). Víme, že $\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = 2$, $\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = -3$. Najděte $\oint_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$.
Výsledek: 5

Příklad 1.61. Pole $\mathbf{F}$ je nestlačitelné a je definováno všude s výjimkou bodů P_1 , P_2 , P_3 a P_4 (Obr. 6). Víme, že $\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = 6$, $\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = -2$, $\oint_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = 2$. Najděte $\oint_{C_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$.
Výsledek: 6

Příklad 1.62. Pole $\mathbf{F}$ je nestlačitelné a je definováno všude s výjimkou bodů P_1 , P_2 , P_3 a P_4 (Obr. 7). Víme, že $\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = 5$, $\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = 2$, $\oint_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = 1$, $\oint_{C_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = -3$. Najděte $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$.
Výsledek: 3

Příklad 1.63. Užitím Greenovy věty vypočítejme křivkový integrál

$$\oint_C (x + y) \, dx - (x - y) \, dy,$$

kde C je kladně orientovaná elipsa $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, $(a > 0, b > 0)$.

Řešení: Připomeňme, že je-li $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ rovinné vektorové pole a C jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka, jež tvoří hranici množiny M , pak podle Greenovy věty platí, že tok tohoto vektorového

pole přes hranici množiny M (tj. křivku C) je roven úhrnému množství divergence tohoto pole na M . Tedy platí

$$(12) \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_M \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA,$$

tj.

$$(13) \quad \oint_C -Q(x, y) \, dx + P(x, y) \, dy = \int_M \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right) dA.$$

Chceme-li nyní použít k výpočtu integrálu $\oint_{(C)} (x+y) \, dx - (x-y) \, dy$ vzorec (13), znamená to, že místo toku vektorového pole $\mathbf{F}(x, y) = (-(x-y), -(x+y))$ přes křivku C , můžeme počítat úhrné množství divergence tohoto pole na M . Protože $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = (-1, -1)$, je

$$\oint_{(C)} (x+y) \, dx - (x-y) \, dy = \int_M (-1-1) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -2abr \, dr \, d\phi = -2ab\pi$$

(Dvojný integrál jsme vypočítali substitucí pomocí zobecněných polárních souřadnic.)

Příklad 1.64. *Užitím Greenovy věty vypočítejme křivkový integrál*

$$\oint_{(C)} \left(\frac{1}{x} + 2xy - \frac{y^3}{3} \right) dx + \left(\frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3} \right) dy,$$

kde C je kladně orientovaná hranice množiny

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x \right\}.$$

Řešení: Protože počítaný křivkový integrál nám opět představuje levou stranu ve vzorci (13), je

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3}, -\frac{1}{x} - 2xy + \frac{y^3}{3} \right).$$

Odtud

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = (2x + x^2, -2x + y^2).$$

Podle vzorce (13) pak dostáváme

$$\begin{aligned} & \oint_{(C)} \left(\frac{1}{x} + 2xy - \frac{y^3}{3} \right) dx + \left(\frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3} \right) dy = \\ & = \int_M (x^2 + y^2) \, dA = \int_2^3 \int_{\pi/6}^{\pi/3} r^3 \, d\phi \, dr = \frac{65}{24}\pi. \end{aligned}$$

(Dvojný integrál jsme vypočítali substitucí pomocí polárních souřadnic.)

Příklad 1.65. *Vypočítejme obsah plochy omezené jedním obloukem cykloidy s parametrizací $\psi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ ($a > 0$), $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a osou x .*

Řešení: Jednoduchým důsledkem Greenovy věty je vzorec pro výpočet míry (obsahu) množiny M ohraničené uzavřenou kladně orientovanou křivkou C . Zvolíme-li např.

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right), \quad \text{je} \quad \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

a podle vzorce (13) je

$$(14) \quad \frac{1}{2} \oint_C -y \, dx + x \, dy = \int_M \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \, dA = \int_M dA = \mu(M).$$

Obecně stačí, zvolíme-li si libovolné rovinné vektorové pole $\mathbf{F}$, jehož $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1$. Zvolíme-li např. $\mathbf{F}(x, y) = (x, 0)$ a z (13) dostáváme další vztah pro výpočet míry množiny

$$(15) \quad \oint_C x \, dy = \int_M 1 \cdot dA = \int_M dA = \mu(M).$$

V našem případě je hranice množiny M tvořena dvěma jednoduchými na sebe navazujícími křivkami C_1 a C_2 , kde C_1 je část osy x mezi body $(0, 0)$ a $(2a\pi, 0)$ a C_2 je oblouk cykloidy vycházející z bodu $(2a\pi, 0)$ a vracující se do bodu $(0, 0)$. Hranice je pak při takto zvolené orientaci orientována kladně. (Připomeňme jednoduché pravidlo pro určení orientace uzavřené křivky - hranice množiny: Procházíme-li křivkou ve směru zvolené orientace a máme-li uzavřenou množinu po levé ruce, je křivka orientována kladně. V případě, že množina je po pravé ruce, je křivka orientována záporně.) Je tedy

$$\mu(M) = \frac{1}{2} \oint_C -y \, dx + x \, dy = \frac{1}{2} \oint_{C_1} -y \, dx + x \, dy + \frac{1}{2} \oint_{C_2} -y \, dx + x \, dy.$$

Křivku C_1 parametrizujeme funkcí $\psi(t) = (t, 0)$, $t \in \langle 0, 2a\pi \rangle$. Snadno zjistíme, že

$$\frac{1}{2} \oint_{C_1} -y \, dx + x \, dy = 0.$$

Křivka C_2 je parametrizována funkcí $\psi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Protože jsme hranici množiny orientovali kladně, postupujeme po křivce C_2 proti rostoucímu parametru, a to znamená, že při výpočtu druhého integrálu musíme u tohoto integrálu změnit znaménko. Je tedy po úpravě

$$\frac{1}{2} \oint_{C_2} -y \, dx + x \, dy = -\frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (-2 + 2 \cos t + t \sin t) \, dt = 3a^2\pi,$$

a tedy

$$\mu(M) = 3a^2\pi.$$

Příklad 1.66. Užitím Stokesovy věty v rovině vypočítejme křivkový integrál

$$\oint_{(C)} \left(\frac{1}{x} - x^2y + 2xy e^{x^2y} \right) dx + \left(xy^2 - \frac{1}{y} + x^2 e^{x^2y} \right) dy,$$

kde C je kladně orientovaná část lemniskáty $(x^2 + y^2)^2 = xy$, $(x \geq 0, y \geq 0)$.

Řešení: Připomeňme, že je-li $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ rovinné vektorové pole a C jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka jež tvoří hranici množiny M , potom pro cirkulaci a rotaci tohoto pole platí ($\mathbf{k} = (0, 0, 1)$)

$$(16) \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_M \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA,$$

tj.

$$(17) \quad \oint_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \int_M \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dA.$$

Předně je

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2x e^{x^2 y} + 2x^3 y e^{x^2 y} - x^2, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 2x e^{x^2 y} + 2x^3 y e^{x^2 y} + y^2.$$

Potom podle (17) je

$$\oint_C \left(\frac{1}{x} - x^2 y + 2xy e^{x^2 y} \right) dx + \left(xy^2 - \frac{1}{y} + x^2 e^{x^2 y} \right) dy = \int_M (y^2 + x^2) dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2) \leq xy \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$. Použitím substituce pomocí polárních souřadnic (??) pak dostaneme

$$\int_M (y^2 + x^2) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\cos \phi \sin \phi}} r^3 dr d\phi = \frac{\pi}{64}.$$

V příkladech 1.67 – 1.76 vypočítejte křivkové integrály pomocí Greenovy věty.

Příklad 1.67. $\int_C (2e^{2x} \sin y - 3y^3) \, dx + (e^{2x} \cos y + \frac{4}{3}x^3) \, dy$, kde C je kladně orientovaná křivka $4x^2 + 9y^2 = 36$. **Výsledek:** 108π

Příklad 1.68. $\int_C (\cos x \ln y + 2e^{2x} y^2) \, dx + \left(\frac{\sin x}{y} + 2e^{2x} y + \frac{4}{3}x^3 \right) dy$, kde C je kladně orientovaná křivka $4x^2 + y^2 = 4$. **Výsledek:** 2π

Příklad 1.69. $\int_C (e^x \ln y - y^2 x) \, dx + \left(\frac{e^x}{y} - \frac{1}{2}x^2 y \right) dy$, kde C je kladně orientovaná křivka $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$. **Výsledek:** 4π

Příklad 1.70. $\int_C (e^x \sin y - xy^2) \, dx + (e^x \cos y - \frac{1}{2}x^2 y) \, dy$, kde C je kladně orientovaná křivka $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$. **Výsledek:** 4π

Příklad 1.71. $\int_C (2xy + y^2) \, dx + (x^2 + 3xy) \, dy$, kde C je kladně orientovaná hranice množiny $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$. **Výsledek:** 0

Příklad 1.72. $\int_C (xy + y^2) \, dx + (x^2 + 2xy) \, dy$, kde C je kladně orientovaná hranice množiny $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\}$. **Výsledek:** 0

Příklad 1.73. $\int_C e^x(1 - \cos y) dx - e^x(y - \sin y) dy$, kde C je kladně orientovaná hranice množiny $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 0, \pi \rangle \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{\sin x}\}$.

Výsledek: $-(e^\pi + 1)/4$

Příklad 1.74. $\int_C \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy$, kde C je kladně orientovaná hranice množiny $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$.

Výsledek: $\frac{1}{12}\pi \ln 2$

Příklad 1.75. $\int_C y^3 dx - x^3 dy$, kde C je kladně orientovaná hranice množiny $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)\} (a > 0)$.

Výsledek: $-\frac{3}{32}\pi a^4$

Příklad 1.76. $\int_C (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y - 1) dy$, kde C je půlkružnice $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$, $y \leq 0$ s počátečním bodem $(0, 0)$ a koncovým bodem $(a, 0)$. [Návod: Doplňte křivku C úsečkou spojující počáteční koncový bod půlkružnice na uzavřenou křivku.]

Výsledek: $-\pi a^2/8$

V příkladech 1.67 – 1.76 vypočítejte křivkové integrály pomocí Stokesovy věty v rovině.

Příklad 1.77. Pomocí křivkového integrálu odvoďte vztah pro výpočet obsahu kruhu o poloměru R .

Příklad 1.78. Pomocí křivkového integrálu vypočítejte obsah plochy omezené křivkami $x = y^2$ a $x = 4$.

Výsledek: $32/3$

Příklad 1.79. Pomocí křivkového integrálu vypočítejte obsah plochy omezené křivkami $x = y^3$, $x = 8$ a $y = 0$.

Výsledek: 12

Příklad 1.80. Vypočítejte obsah plochy ohraničené smyčkou Descartesova listu $x^3 + y^3 - 3axy = 0 (a > 0)$ s parametrizací $\psi(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}\right)$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$.

Výsledek: $3a^2/2$

Příklad 1.81. Vypočítejte obsah plochy ohraničené lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) (a > 0)$.

Výsledek: $2a^2$

Příklad 1.82. Vypočítejte obsah plochy ohraničené asteroidou s parametrizací $\psi(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t) (a > 0)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Výsledek: $3\pi a^2/8$

Příklad 1.83. Vypočítejte obsah plochy ohraničené srdcovkou s parametrizací $\psi(t) = (2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Výsledek: 6π

1.3. Konzervativní pole.

Příklad 1.84. Vypočítejme křivkový integrál $\int_C (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$, kde C je křivka spojující body $(-2, -1)$ a $(3, 0)$.

Řešení: Nejprve ukážeme, že rovinné vektorové pole

$\mathbf{F}(x, y) = (x^4 + 4xy^3, 6x^2y^2 - 5y^4)$ je v $\mathbb{R}^2$ nerotační, tj. že platí

$$(18) \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}.$$

Platí

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 12xy^2, \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 12xy^2$$

a podmínka (18) je splněna. To znamená, že pole $\mathbf{F}$ je nerotační a je v $\mathbb{R}^2$ potenciální (konzervativní). Počítaný integrál je tedy nezávislý na cestě a je na nás, jakou křivku C spojující body $(-2, -1)$ a $(3, 0)$ si zvolíme. Zvolme v našem případě C jako lomenou čáru složenou ze dvou úseček C_1 a C_2 spojující body $(-2, -1)$, $(3, -1)$ a $(3, 0)$. Jejich parametrizace jsou

$$\begin{aligned} C_1 : \quad x &= t, \quad y = -1, \quad t \in \langle -2, 3 \rangle, \\ C_2 : \quad x &= 3, \quad y = t, \quad t \in \langle -1, 0 \rangle. \end{aligned}$$

Potom

$$\int_C (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy = \int_{-2}^3 (t^4 - 4t) dt + \int_{-1}^0 (54t^2 - 5t^4) dt = 62.$$

Příklad 1.85. Vypočítejme křivkový integrál $\int_C yz dx + (2 + xz) dy + (xy - 1) dz$, kde C je křivka spojující body $(-1, -1, -1)$ a $(1, 1, 1)$.

Řešení: Vektorové pole $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, 2 + xz, xy - 1)$ je v $\mathbb{R}^3$ nerotační. Platí totiž

$$\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z}, \quad \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}$$

a vektorové pole $\mathbf{F}$ je potenciální a počítaný integrál je nezávislý na cestě. Zvolme tentokrát za křivku C úsečku spojující body $(-1, -1, -1)$ a $(1, 1, 1)$. Její parametrizace je $\psi(t) = (-1 + 2t, -1 + 2t, -1 + 2t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Potom

$$\begin{aligned} \int_C yz dx + (2 + xz) dy + (xy - 1) dz &= \\ &= \int_0^1 ((-1 + 2t)^2 + (2 + (-1 + 2t)^2) + ((-1 + 2t)^2 - 1)) 2 dt = 4. \end{aligned}$$

Poznámka 1.86. V případě, že křivkový integrál je nezávislý na cestě a křivka C je libovolná křivka s počátečním bodem A a koncovým bodem B , je zvykem místo $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ psát $\int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$. Dále je třeba si uvědomit, že křivka $C \subseteq M$, kde M je množina, na které je $\mathbf{F}$ potenciální.

Příklad 1.87. Vypočítejme práci, kterou vykoná rovinné vektorové pole $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin y, \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x \right)$ posunem hmotného břemene z bodu $A = (0, 0)$ do bodu $B = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Řešení: Ukážeme nejdříve, že pole $\mathbf{F}$ je na množině $M = (-1, 1) \times (-1, 1)$ potenciální. Je

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

tj. pole je nerotační a vektorové pole $\mathbf{F}$ je na množině M potenciální. Dále víme, že práce, kterou vykoná vektorové pole podél křivky C (křivka C musí ležet v M) je dána křivkovým integrálem

$$(19) \quad W = \int_C \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin y \right) dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x \right) dy.$$

Protože pole $\mathbf{F}$ je potenciální, existuje skalární pole f (potenciál pole $\mathbf{F}$) takové, že $\mathbf{F} = \nabla f$, a platí

$$W = f(B) - f(A).$$

Potenciál f budeme hledat analogickou metodou, kterou jsme řešili exaktní diferenciální rovnice.

Podle předpokladu je

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin y, \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x \right),$$

tedy

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin y.$$

Integrací této rovnice podle x dostaneme

$$f(x, y) = y \arcsin x + x \arcsin y + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ je integrační konstanta, která ovšem může být funkcí y . Derivováním f podle y dostaneme

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x + \varphi'(y).$$

Podle předpokladu je ale také

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x.$$

Odtud pak

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c,$$

kde c je libovolná konstanta (můžeme položit $c = 0$). Je tedy

$$f(x, y) = y \arcsin x + x \arcsin y$$

a

$$W = f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) - f(0, 0) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

Příklad 1.88. Vypočítejme práci, kterou vykoná prostorové vektorové pole $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2z^3 + z, 2xyz^3 - z, 3xy^2z^2 + x - y)$ posunem hmotného břemene z bodu $A = (1, 1, 1)$ do bodu $B = (-2, 1, -1)$.

Řešení: Podobně jako v předchozím příkladě ukážeme, že pole $\mathbf{F}$ je v $\mathbb{R}^3$ nerotační, tedy, že je potenciální. Je

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} &= \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} = 6xyz^2 - 1, \\ \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} &= \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} = 3y^2z^2 + 1, \\ \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x} &= \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} = 2yz^3.\end{aligned}$$

Existuje tedy skalární pole f (potenciál pole $\mathbf{F}$) takové, že $\mathbf{F} = \nabla f$, a platí

$$W = f(B) - f(A).$$

Potenciál f budeme opět hledat analogicky stejnou metodou jako v předchozím příkladu.

Podle předpokladu je

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2z^3 + z, 2xyz^3 - z, 3xy^2z^2 + x - y),$$

tedy

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = y^2z^3 + z \Rightarrow f(x, y, z) = xy^2z^3 + zx + \varphi_1(y, z),$$

kde $\varphi_1(y, z)$ je integrační konstanta, která ovšem může být funkcí y a z . Derivováním f podle y dostaneme

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = 2xyz^3 + \frac{\partial \varphi_1(y, z)}{\partial y}.$$

Je ale také

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = Q(x, y, z) = 2xyz^3 - z.$$

Odtud pak

$$\frac{\partial \varphi_1(y, z)}{\partial y} = -z \Rightarrow \varphi_1(y, z) = -zy + \varphi_2(z),$$

kde $\varphi_2(z)$ je integrační konstanta, která však už může být funkcí pouze z . Pro funkci f tedy dostáváme

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + zx - yz + \varphi_2(z).$$

Nyní derivováním f podle z dostaneme

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = 3xy^2z^2 + x - y + \varphi_2'(z),$$

a protože je také

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = R(x, y, z) = 3xy^2z^2 + x - y,$$

dostáváme

$$\varphi_2'(z) = 0 \Rightarrow \varphi_2(z) = c,$$

kde c je libovolná konstanta (můžeme položit $c = 0$).

Je tedy

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + zx - yz$$

a pro velikost vykonané práci W dostáváme (v příslušných jednotkách)

$$W = f(B) - f(A) = 5 - 1 = 4.$$

Příklad 1.89. Vypočítejte křivkový integrál $\int_C \left(\frac{y}{x} + y^2\right) dx + (\ln x + 2xy) dy$, kde C je křivka s počátečním bodem $A = (1, 1)$ a koncovým bodem $B = (2, 3)$.

Výsledek: $3 \ln 2 + 17$

Příklad 1.90. Vypočítejte křivkový integrál $\int_C (2x \ln y - y) dx + \left(\frac{x^2}{y} - x\right) dy$, kde C je křivka s počátečním bodem $A = (1, 1)$ a koncovým bodem $B = (3, 2)$.

Výsledek: $9 \ln 2 - 5$

Příklad 1.91. Vypočítejte křivkový integrál

$\int_C (3x^2y^2 + y^2) dx + (2x^3y + 2xy + 1) dy$, kde C je křivka s počátečním bodem $A = (1, -1)$ a koncovým bodem $B = (2, 1)$.

Výsledek: 10

Příklad 1.92. Vypočítejte křivkový integrál

$\int_C (2xy^3 + y^2 + 1) dx + (3x^2y^2 + 2xy) dy$, kde C je křivka s počátečním bodem $A = (-1, -1)$ a koncovým bodem $B = (2, 1)$.

Výsledek: 11

Příklad 1.93. Ukažte, že vektorové pole $F(x, y) = \left(\frac{y}{1+x^2} + \arctg y, \frac{x}{1+y^2} + \arctg x\right)$ je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu $A = (0, 0)$ do bodu $B = (1, 1)$.

Výsledek: $f(x, y) = y \arctg x + x \arctg y, W = \pi/2$

Příklad 1.94. Ukažte, že vektorové pole

$F(x, y) = (2x \sin y - y \sin x, \cos x + x^2 \cos y)$ je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu $A = (0, 0)$ do bodu $B = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Výsledek: $f(x, y) = x^2 \sin y + y \cos x, W = \pi^2/4$

Příklad 1.95. Ukažte, že vektorové pole

$F(x, y) = (\sin y - y^2 \sin x, x \cos y + 2y \cos x)$ je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu $A = (0, 0)$ do bodu $B = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Výsledek: $f(x, y) = x \sin y + y^2 \cos x, W = \pi/2$

Příklad 1.96. Vypočítejte křivkový integrál

$\int_C (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz$, kde C je křivka s počátečním bodem $A = (1, 1, 1)$ a koncovým bodem $B = (-1, 2, -2)$. **Výsledek:** $-22/3$

Příklad 1.97. Vypočítejte křivkový integrál

$\int_C \left(2xz + \frac{1}{y}\right) dx - \frac{x+z}{y^2} dy + \left(x^2 + \frac{1}{y}\right) dz$, kde C je křivka s počátečním bodem $A = (-1, 3, -2)$ a koncovým bodem $B = (1, 2, 3)$. **Výsledek:** 8

Příklad 1.98. Vypočítejte křivkový integrál

$\int_C 3x^2y^2z dx + (2x^3yz - z^2) dy + (x^3y^2 - 2yz + 3z^2) dz$, kde C je křivka s počátečním bodem $A = (-1, 3, 0)$ a koncovým bodem $B = (0, 1, 2)$.

Výsledek: 4

Příklad 1.99. Ukažte, že vektorové pole

$F(x, y, z) = \left(\ln yz + 2xy, \frac{x}{y} + x^2 + z, \frac{x}{z} + y\right)$ je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu $A = (1, 1, 1)$ do bodu $B = (2, 1, 2)$.

Výsledek: $f(x, y, z) = x \ln yz + x^2y + zy$, $W = 2 \ln 2 + 4$

Příklad 1.100. Ukažte, že vektorové pole

$F(x, y, z) = \left(\arctg yz + z, \frac{xz}{1+y^2z^2} + z^2, \frac{xy}{1+y^2z^2} + x + 2yz + 1\right)$ je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu $A = (1, 0, -1)$ do bodu $B = (1, 1, \sqrt{3})$.

Výsledek: $f(x, y, z) = x \arctg yz + xz + yz^2 + z$, $W = \pi/3 + 5 + 2\sqrt{3}$