

PŘÍKLADY K MATEMATICE 3 - VÍCENÁSOBNÉ INTEGRÁLY

ZDENĚK ŠIBRAVA

1. VÍCENÁSOBNÉ INTEGRÁLY

1.1. Dvojné integrály.

Příklad 1.1. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M \frac{x^2}{3+y^2} dA,$$

kde $M = \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení: Funkce $f(x, y) = \frac{x^2}{3+y^2}$ je na obdélníku (dvojměrném intervalu) M spojitá. Užitím Fubiniovy věty převedeme dvojný integrál na dvojnásobný integrál (přičemž nezáleží na pořadí, ve kterém budeme integrovat) a postupnou integrací dostaneme

$$\begin{aligned} \int_M \frac{x^2}{3+y^2} dA &= \int_0^3 \int_0^1 \frac{x^2}{3+y^2} dy dx = \int_0^3 \left[\frac{x^2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{3}} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{18} \int_0^3 x^2 dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 1.2. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M x \sin y dA,$$

kde $M = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, \pi/2 \rangle$.

Řešení: Funkce $f(x, y) = x \sin y$ je na M spojitá. Pomocí Fubiniovy věty opět převedeme dvojný integrál na dvojnásobný. Protože meze pro x i y jsou konstantní, opět nezáleží v jakém pořadí budeme integrovat. Postupně dostaneme

Date:

$$\begin{aligned}\int_M x \sin y \, dA &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 x \sin y \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} x^2 \sin y \right]_{x=1}^{x=2} dy = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin y \, dy = \frac{3}{2} .\end{aligned}$$

Příklad 1.3. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int_M x^2 y \, dA,$$

kde $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$.

Výsledek: 4

Příklad 1.4. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int_M e^x y \, dA,$$

kde $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 4 \rangle$.

Výsledek: $8(e-1)$

Příklad 1.5. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int_M \frac{1}{(1+x+2y)^3} \, dA,$$

kde $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 4 \rangle$.

Výsledek: $\frac{11}{90}$

Příklad 1.6. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int_M x^2 y e^{xy} \, dA,$$

kde $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.

Výsledek: 2

Příklad 1.7. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int_M xy^2 \sin(x^2 + y) \, dA,$$

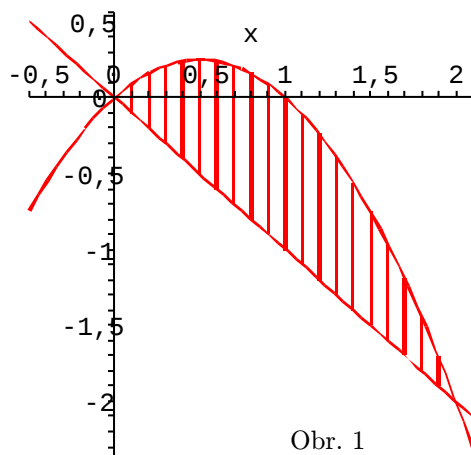
kde $M = \langle 0, \sqrt{\pi} \rangle \times \langle 0, \pi/2 \rangle$.

Výsledek: $\frac{1}{4}\pi^2 - 2$

Příklad 1.8. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M xy \, dA,$$

kde M je množina ohraničená křivkami $y = -x$ a $y = x - x^2$.



Obr. 1

Řešení: M je ohraničená přímkou $y = -x$ a parabolou $y = x - x^2$ (Obr. 1).

Souřadnice průsečíků obou křivek získáme řešením soustavy dvou rovnic

$$\begin{aligned} y &= -x, \\ y &= x - x^2. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy zjistíme, že křivky se protnou v bodech $(0, 0)$ a $(2, -2)$. Funkce $f(x, y) = xy$ je na M spojitá a je zřejmé, že pro libovolné $x \in \langle 0, 2 \rangle$ je $-x \leq y \leq x - x^2$. Užitím Fubiniovy věty pak dostáváme

$$\begin{aligned} \int_M xy \, dA &= \int_0^2 \int_{-x}^{x-x^2} xy \, dy \, dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=-x}^{y=x-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (x(x-x^2)^2 - x^3) \, dx = -\frac{16}{15}. \end{aligned}$$

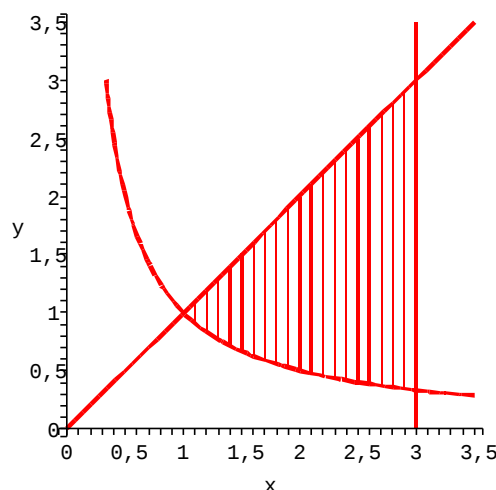
Příklad 1.9. Vypočítejme dvojný integrál

$$\int_M \frac{x^2}{y^2} \, dA,$$

kde M je množina ohraničená křivkami $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ a $x = 3$.

Řešení: Množina M je část roviny ohraničená přímkami $y = x$, $x = 3$ a hyperbolou $y = \frac{1}{x}$ (Obr. 2).

Vyšetřením průsečíků křivek, které tvoří hranici množiny a také z obrázku je zřejmé, že pro všechny body (x, y) množiny je $x \in \langle 1, 3 \rangle$ a $\frac{1}{x} \leq y \leq x$. Protože



Obr. 2

funkce $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$ je na M spojitá můžeme použít Fubiniovu větu. Potom

$$\begin{aligned} \int_M \frac{x^2}{y^2} dA &= \int_1^3 \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy dx = \int_1^3 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{y=1/x}^{y=x} dx = \\ &= \int_1^3 (-x + x^3) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_1^3 = 16. \end{aligned}$$

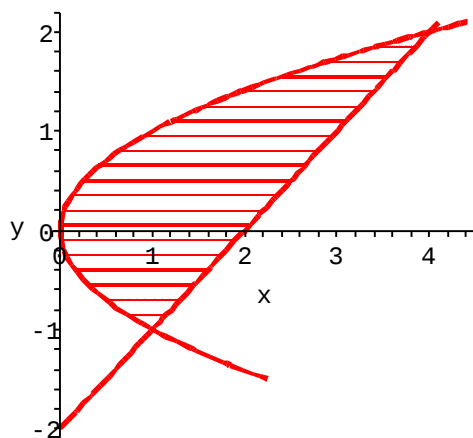
Příklad 1.10. Vypočítejme dvojný integrál

$$\int_M x^2 y dA,$$

kde M je množina ohraničená křivkami $y^2 = x$ a $y = x - 2$.

Řešení: Množina M je ohraničena parabolou $y^2 = x$ a přímkou $y = x - 2$ (Obr. 3), přičemž hraniční křivky se protnou v bodech $(1, -1)$, a $(4, 2)$

Z obrázku je patrné, že v tomto případě bude lepší dvojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na dvojnásobný tak, abychom integrovali nejdříve podle x a teprve pak podle y . V opačném případě bychom totiž museli množinu M rozdělit na dvě množiny, a to na M_1 , kde $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a $-\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}$ a na M_2 , kde $x \in \langle 1, 4 \rangle$ a $x - 2 \leq y \leq \sqrt{x}$. V případě, že zaměníme pořadí integrace, platí pro M , že $y \in \langle -1, 2 \rangle$ a $y^2 \leq x \leq y + 2$. Potom



Obr. 3

$$\begin{aligned}
 \int_M x^2 y \, dA &= \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} x^2 y \, dx \, dy = \int_{-1}^2 \left[\frac{1}{3} x^3 y \right]_{x=y^2}^{x=y+2} dy = \\
 &= \int_{-1}^2 \frac{1}{3} y ((y+2)^3 - y^6) \, dy = \frac{603}{40} .
 \end{aligned}$$

Příklad 1.11. Vypočítejme dvojný integrál

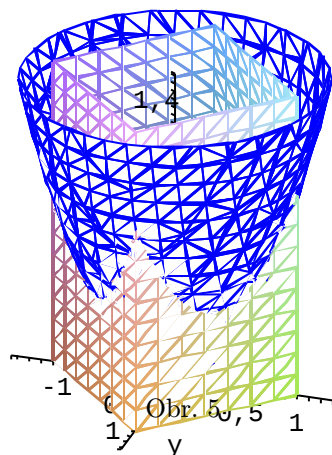
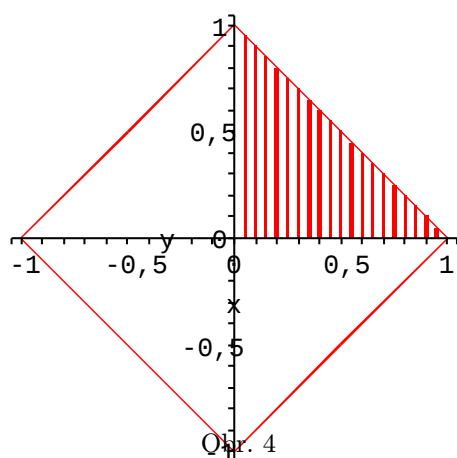
$$\int_M (x^2 + y^2) \, dA,$$

kde M je množina ohraničená křivkou $|x| + |y| = 1$.

Řešení: Hraniční křivkou množiny M je lomená čára, s vrcholy v bodech $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ a $(0, -1)$, (Obr. 4). Funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ je na množině M spojitá a nezáporná. Z definice dvojného integrálu $\int_M f(x, y) \, dA$ víme, že jeho geometrickým významem (za předpokladu, že funkce f je na M spojitá a nezáporná) je objem válcového tělesa (Obr. 5)

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in M \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Těleso, jehož objem máme počítat (část hranolu jehož osa je rovnoběžná s osou z), je symetrické podle rovin $x = 0$ a $y = 0$. Stačí tedy počítat pouze přes část množiny M ležící v 1. kvadrantu. Výsledný integrál bude čtyřnásobkem takto



vypočítaného integrálu. Je tedy

$$\begin{aligned} \int_M (x^2 + y^2) dA &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy dx = 4 \int_0^1 \left[yx^2 + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \\ &= 4 \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Příklad 1.12. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M (2x + y) dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 3\}$.

Výsledek: 27/2

Příklad 1.13. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \sqrt{xy - y^2} dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq x \leq 10y\}$.

Výsledek: 6

Příklad 1.14. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \frac{y}{x^2 + y^2} dA,$$

kde M je uzavřená množina ohraničená křivkami $y^2 = 2x$ a $y = 2x$.

Výsledek: $\ln(5/4)$

Příklad 1.15. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M e^{x/y} dA,$$

kde M je uzavřená množina ohraničená křivkami $y^2 = x$, $x = 0$ a $y = 1$.

Výsledek: $1/2$

Příklad 1.16. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M (x + y^2) \, dA,$$

kde M je uzavřená množina ohraničená křivkami $y = x^2$ a $y^2 = x$.

Výsledek: $33/140$

Příklad 1.17. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M x^2 y \, dA,$$

kde M je uzavřená množina ohraničená křivkami $y = x^2 - 2x + 1$ a $y = x + 1$.

Výsledek: $729/28$

Příklad 1.18. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \sqrt{4x^2 - y^2} \, dA,$$

kde M je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

Výsledek: $\frac{1}{18}(3\sqrt{3} + 2\pi)$

Příklad 1.19. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M x(y - 1) \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \leq x + 1 \wedge y \geq 0\}$.

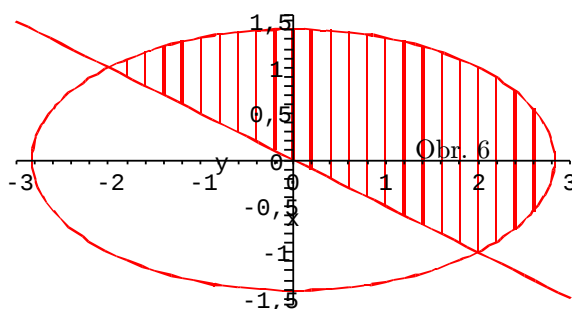
Výsledek: $-1/12$

Příklad 1.20. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M xy \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 8 \wedge y \geq -\frac{x}{2}\}$ (Obr. 6).

Výsledek: 0



Příklad 1.21. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M 4xy \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq x+1 \wedge 1-x \leq y \leq 2-x\}$.

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$x \leq y \leq x+1 \wedge 1-x \leq y \leq 2-x,$$

tj.

$$(1) \quad 0 \leq y-x \leq 1 \wedge 1 \leq y+x \leq 2.$$

Zvolme nyní substituci $u = y-x$ a $v = y+x$. Dosazením u a v do (1) dostaneme

$$0 \leq u \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq v \leq 2.$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \frac{1}{2}(v-u)$ a $y = \frac{1}{2}(v+u)$ a spočítáme Jakobián.

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $|J| = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\int_M 4xy \, dA = \int_1^2 \int_0^1 (v-u)(u+v) \frac{1}{2} \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_0^1 (v^2 - u^2) \, du \, dv = 1.$$

Příklad 1.22. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M x^2 y^2 \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x} \wedge x \leq y \leq 2x\}$.

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x} \wedge x \leq y \leq 2x,$$

tj.

$$(2) \quad 1 \leq xy \leq 3 \wedge 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2.$$

Zvolme nyní substituci $u = xy$ a $v = \frac{y}{x}$. Dosazením u a v do (3) dostaneme

$$1 \leq u \leq 3 \quad \wedge \quad 1 \leq v \leq 2.$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ a spočítáme Jakobián.

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{uv}}{v^2} \\ \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{uv}} & \frac{1}{2} \frac{u}{\sqrt{uv}} \end{array} \right| = \frac{1}{2v}.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $|J| = \frac{1}{2v}$ dostaneme

$$\int_M x^2 y^2 \, dA = \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{u^2}{v} \, dv \, du = \frac{13 \ln 2}{3}.$$

Poznámka: Při řešení předchozího příkladu byl asi nejpracnější výpočet Jakobiánu. Při jeho výpočtu jsme si ale mohli usnadnit práci, kdybychom využili vlastosti regulárního zobrazení a zobrazení k němu inverzního. Platí totiž

$$J(u, v) = \frac{1}{J(x(u, v), y(u, v))}.$$

Pro $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ je tedy

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x}.$$

Dosazením za $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ pak dostáváme $J(x(u, v), y(u, v)) = 2v$. Odtud pak

$$J(u, v) = \frac{1}{2v}.$$

Příklad 1.23. Vypočítejme dvojný integrál

$$\int_M \frac{y^3}{x^3} \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{x} \leq y \leq \frac{3}{x} \wedge x \leq y^2 \leq 2x\}$.

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$\frac{2}{x} \leq y \leq \frac{3}{x} \wedge x \leq y^2 \leq 2x,$$

tj.

$$(3) \quad 2 \leq xy \leq 3 \wedge 1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2.$$

Zvolme nyní substituci $u = xy$ a $v = \frac{y^2}{x}$. Dosazením u a v do (3) dostaneme

$$2 \leq u \leq 3 \quad \wedge \quad 1 \leq v \leq 2.$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$ a spočítáme Jakobián. Pro výpočet Jakobiánu použijeme předchozí poznámku. Je tedy

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x}.$$

Dosazením za $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$ pak dostáváme $J(x(u, v), y(u, v)) = 3v$. Odtud pak

$$J(u, v) = \frac{1}{3v}.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $|J| = \frac{1}{3v}$ dostaneme

$$\int_M \frac{y^3}{x^3} dA = \int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{3} \frac{v}{u} dv du = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

Příklad 1.24. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M \sqrt{x^2 + y^2} dA,$$

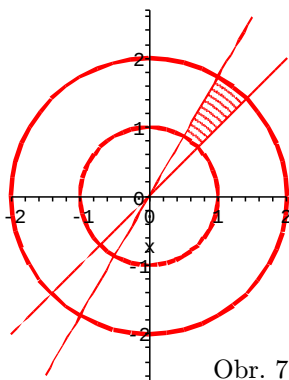
kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$.

Řešení: Při výpočtu tohoto integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic

$$(4) \quad x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad \text{a} \quad J = r.$$

V našem případě je M (Obr. 7) obrazem obdélníku $N = \langle 1, 2 \rangle \times \langle \pi/4, \pi/3 \rangle$ jak zjistíme dosazením za x a y z (4) do nerovnic popisujících množinu M

$$\begin{aligned} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, & & x \leq y \leq \sqrt{3}x, \\ 1 \leq r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi \leq 4, & & r \cos \phi \leq r \sin \phi \leq \sqrt{3}r \cos \phi, \\ 1 \leq r \leq 2, & & 1 \leq \tan \phi \leq \sqrt{3}, \\ & & \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$



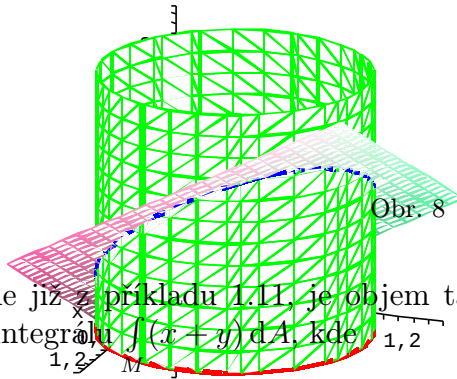
Obr. 7

Použitím věty o substituci ve dvojném integrálu a Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_M \sqrt{x^2 + y^2} dA &= \int_N \sqrt{r^2} r dA^* = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_1^2 r^2 dr d\phi = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 d\phi = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{7}{3} d\phi = \frac{7}{36} \pi. \end{aligned}$$

Příklad 1.25. Vypočítejme objem tělesa, které je ohraničeno plochami $x^2 + y^2 = x + y$, $z = x + y$ a $z = 0$.

Řešení: Těleso, jehož objem máme nalézt, je část rotačního válce určeného řídicí kružnicí $x^2 + y^2 = x + y$, zdola ohraničeného rovinou $z = 0$ a shora rovinou $z = x + y$. (Obr.8)



Jak víme již z příkladu 1.11, je objem takového tělesa číselně roven hodnotě dvojného integrálu $\int_M (x + y) dA$, kde

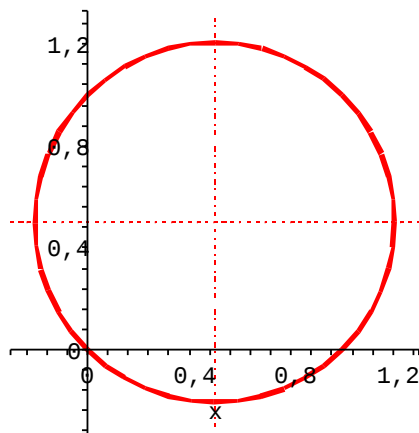
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x + y\}.$$

Doplněním na čtverec a úpravou můžeme podmínku $x^2 + y^2 \leq x + y$ upravit na tvar

$$(5) \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Z (5) je zřejmé, že množina M je kruh se středem v bodě $(1/2, 1/2)$ a poloměrem $\sqrt{2}/2$ (Obr. 9).

Dvojný integrál $\int_M (x + y) dA$ budeme opět počítat pomocí substituce do polárních souřadnic. (Tato substituce převádí integraci přes kruh na integraci přes dvojrozměrný interval.) V našem případě však „posuneme“ těleso tak, aby střed



Obr. 9

řídící kružnice byl počátek. Toho dosáhneme tak, že substituci do polárních souřadnic budeme volit ve tvaru

$$(6) \quad x = \frac{1}{2} + r \cos \phi, \quad y = \frac{1}{2} + r \sin \phi \quad \text{a} \quad J = r.$$

Dosazením do (5) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}, \\ 0 &\leq \left(\frac{1}{2} + r \cos \phi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + r \sin \phi - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}, \\ 0 &\leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Pro ϕ jsme nedostali žádnou omezující podmínku, je tedy $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Potom

$$\begin{aligned} \int_M (x+y) \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}/2} (r + r^2(\cos \phi + \sin \phi)) \, dr \, d\phi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}(\cos \phi + \sin \phi) \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}/2} d\phi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{12}(\cos \phi + \sin \phi) \right) d\phi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

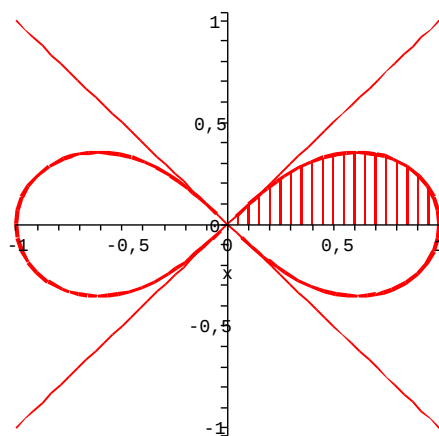
Při počítání objemu jsme mohli místo substituce pomocí „posunutých“ polárních souřadnic (6) použít substituci (4). Dosazením (4) do podmínky $x^2 + y^2 \leq x + y$ postupně dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq r^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \leq r(\cos \phi + \sin \phi), \\ 0 &\leq r \leq (\cos \phi + \sin \phi). \end{aligned}$$

Z podmínky $0 \leq r \leq \cos \phi + \sin \phi$ pak plyne $-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}$. Odtud

$$\begin{aligned} \int_M (x+y) \, dA &= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^{\cos \phi + \sin \phi} (r^2(\cos \phi + \sin \phi)) \, dr \right) d\phi = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos \phi + \sin \phi)^4 \, d\phi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

V tomto případě je však výpočet posledního integrálu složitější než při substituci (6).



Obr. 10

Příklad 1.26. Vypočítejte obsah množiny M , která je ohraničená lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ (Obr. 10).

Řešení: Pro obsah množiny M platí

$$\mu(M) = \int_M dA,$$

kde v našem případě je

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2\}.$$

Z rovnice lemniskáty je vidět, že tato křivka je symetrická podle osy x i podle osy y (je sudá v obou proměnných). Při výpočtu obsahu plochy ohraničené touto křivkou stačí počítat obsah pouze té části M , která leží v prvním kvadrantu a výsledek násobit čtyřmi. Pro výpočet integrálu použijeme substituci do polárních

souřadnic. Dosazením (4) do nerovnice určující M dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, \\ 0 &\leq r^4 \leq r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi), \\ (7) \quad 0 &\leq r \leq \sqrt{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi} = \sqrt{\cos 2\phi}. \end{aligned}$$

Z podmínky (7) dostáváme $0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\phi}$ a dále

$$(8) \quad \cos 2\phi \geq 0, \quad \text{tj.} \quad \phi \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\rangle.$$

Podle předpokladu počítáme obsah pouze té části M , pro kterou je $x \geq 0$ a $y \geq 0$, tj.

$$\cos \phi \geq 0 \wedge \sin \phi \geq 0 \Rightarrow \phi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Spolu s (8) tedy dostáváme $\phi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$. Potom

$$\mu(M) = \int_M dA = 4 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\phi}} r dr \right) d\phi = 2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\phi d\phi = 1.$$

Příklad 1.27. Vypočítejme dvojný integrál

$$\int_M (x^2 + y^2) dA,$$

kde $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$.

Řešení: Protože v tomto případě je množina M ohraničená elipsou (Obr. 11), bude výhodné použít substituci pomocí zobecněných polárních souřadnic

$$(9) \quad x = ar \cos \phi, \quad y = br \sin \phi \quad \text{a} \quad J = abr,$$

V zobrazení (9) (uvažovaném na množině $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$) má elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ rovnici $r = 1$.

Při výpočtu integrálu opět stačí, budeme-li integrovat pouze přes část M , která leží v prvním kvadrantu. Použitím substituce (9), kde $a = 3$, $b = 2$, tj.

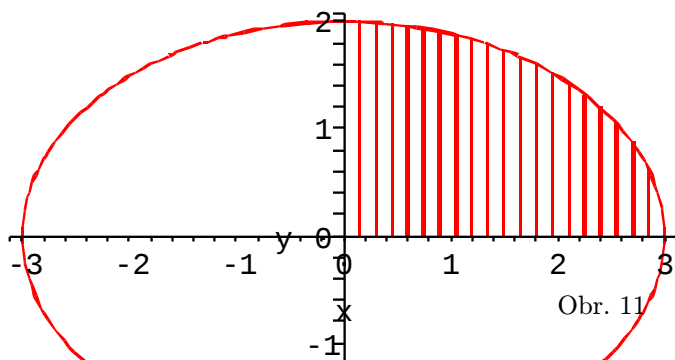
$$x = 3r \cos \phi, \quad y = 2r \sin \phi \quad \text{a} \quad J = 6r,$$

a dosazením do M (za podmínky $x \geq 0$, $y \geq 0$) dostaneme

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \mu(M) = \int_M (x^2 + y^2) dA &= 4 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (9r^2 \cos^2 \phi + 4r^2 \sin^2 \phi) 6r dr \right) d\phi = \\ &= 6 \int_0^{\pi/2} (9 \cos^2 \phi + 4 \sin^2 \phi) d\phi = \frac{39}{2} \pi. \end{aligned}$$

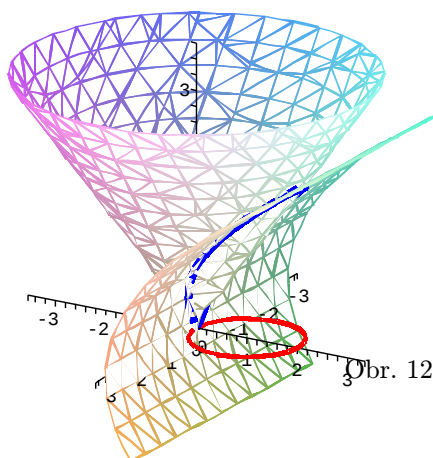


Obr. 11

Příklad 1.28. Vypočítejme obsah části kuželové plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, kterou z ní vytne parabolický válec $z^2 = 2x$ (Obr. 12).

Řešení: Víme, že pro obsah S plochy P , která je částí grafu funkce $z = f(x, y)$, $(x, y) \in M$ platí

$$(10) \quad S = \int_M \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dA.$$



Obr. 12

V našem případě je plocha částí grafu funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Hranici množiny M najdeme jako (pravoúhlý) průmět průniku ploch $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $z^2 = 2x$

do roviny $z = 0$

$$\sqrt{2x} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tj.} \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0.$$

Je tedy

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Množina M je tedy kruh se středem v bodě $(1, 0)$ a poloměrem 1. Dále je

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a odtud

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Substitucí do polárních souřadnic (4) dostaneme

$$S = \int_M \sqrt{2} \, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \phi} \sqrt{2} r \, dr \right) d\phi = \pi\sqrt{2}.$$

Příklad 1.29. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M (1 - 3x - 2y) \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq x\}$.

Výsledek: $2\pi + \frac{8}{3}\sqrt{2}$

Příklad 1.30. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e \wedge y \geq 0\}$.

Výsledek: $\pi/4$

Příklad 1.31. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0\}$.

Výsledek: $\pi(\pi - 2)/4$

Příklad 1.32. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \sin \sqrt{x^2 + y^2} \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.

Výsledek: $-6\pi^2$

Příklad 1.33. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$. **Výsledek:** $\frac{5}{48}\pi^2$

Příklad 1.34. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \frac{x}{y^2} \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \wedge y \geq 1 \wedge x \geq 0\}$. **Výsledek:** $3/2 - \sqrt{2}$

Příklad 1.35. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \sqrt{x^2 + y^2} \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2y \wedge y \geq |x|\}$. **Výsledek:** $20\sqrt{2}/9$

Příklad 1.36. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M xy^2 \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2ax\} \ (a > 0)$. **Výsledek:** $a^5\pi/4$

Příklad 1.37. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M y \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq ay^3\} \ (a > 0)$. **Výsledek:** $\frac{21}{256}\pi a^3$

Příklad 1.38. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M xy \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)\} \ (a > 0)$. **Výsledek:** 0

Příklad 1.39. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$. **Výsledek:** 4π

Příklad 1.40. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M (x - 2y) \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq x \leq \sqrt{12}y\}$. **Výsledek:** $\frac{2}{3}(1 - \sqrt{3})$

Příklad 1.41. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = 1 - x^2$ a $y = x - 1$. **Výsledek:** $9/2$

Příklad 1.42. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $xy = 9$, $y = x$ a $x = 5$. **Výsledek:** $8 + 9 \ln 3 - 9 \ln 5$

V příkladech 1.43 – 1.46 vypočítejte obsahy množiny M .

Příklad 1.43. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$. **Výsledek:** $(\pi - 2)/2$

Příklad 1.44. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x^2 + 4y^2 \geq 4 \wedge y \geq 0\}$. **Výsledek:** π

Příklad 1.45. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 2y\}$. **Výsledek:** $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Příklad 1.46. $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \right)^2 \leq xy \right\}$. **Výsledek:** 18

V příkladech 1.47 – 1.53 vypočítejte objemy daných těles.

Příklad 1.47. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq z \leq 9\}$. **Výsledek:** $\frac{27}{2}\pi$

Příklad 1.48. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 \leq z \leq 4\}$. **Výsledek:** 4π

Příklad 1.49. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2ax \wedge x \leq z \leq 2x\}$ ($a > 0$). **Výsledek:** πa^3

Příklad 1.50.

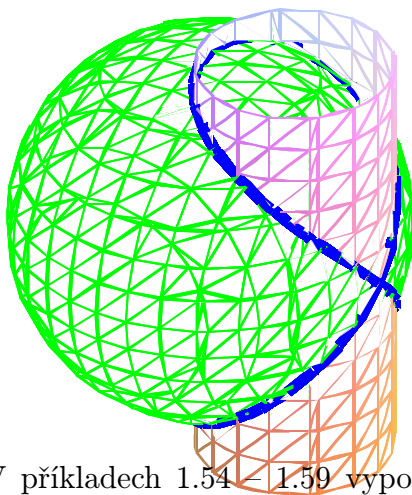
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2(y - x) - 1 \wedge 0 \leq z \leq 2 - (x + 1)^2 - (y - 1)^2\}$. **Výsledek:** $\frac{3}{2}\pi$

Příklad 1.51.

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2(x - y) \wedge 0 \leq z \leq 3 - (x - 1)^2 - (y + 1)^2\}$. **Výsledek:** 4π

Příklad 1.52. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 27y^2 \leq z \leq 6 - 3x^2 - 27y^2\}$. **Výsledek:** π

Příklad 1.53. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 8x^2 + 2y^2 \leq z \leq 4 - 8x^2 - 2y^2\}$. **Výsledek:** π



Obr. 13

V příkladech 1.54 – 1.59 vypočítejte objemy těles ohraničených danými plochami:

Příklad 1.54. $x = 0, y = 0, x + y = 3, z = 0, z = 4x^2 + 2y^2 + 1$.

Výsledek: 45

Příklad 1.55. $y = 1, y = x^2, z = 0, z = x^2 + y^2$.

Výsledek: $\frac{88}{105}$

Příklad 1.56. $y = \ln x, y = \ln^2 x, z = 0, y + z = 1$.
(Pomůcka: Platí $\int \ln^n x \, dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x \, dx$.)

Výsledek: $3e - 8$

Příklad 1.57. $x^2 + y^2 = 2x, z = xy, z = 0 \ (z \geq 0)$.

Výsledek: $2/3$

Příklad 1.58. $x^2 + y^2 = 2y, z = x^2 + y^2, z = 0$.

Výsledek: $\frac{3}{2}\pi$

Příklad 1.59. $x^2 + y^2 = a^2, z = 0, z = e^{-x^2-y^2} \ (a > 0)$.

Výsledek: $\pi(1 - e^{-a^2})$

Příklad 1.60. Vypočítejte objem tzv. Vivianiova tělesa (Obr. 13)

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq ax\} \quad (a > 0).$$

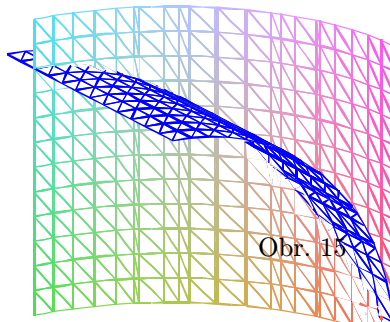
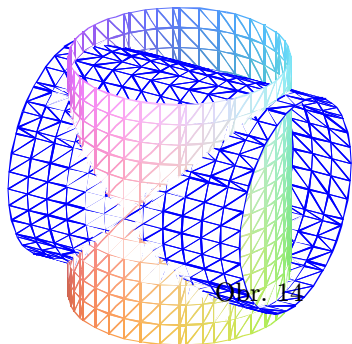
Výsledek: $\frac{2}{9}(3\pi - 4)a^3$

Příklad 1.61. Vypočítejte objem a povrch tělesa ohraničeného dvěma rotačními válcovými plochami o stejném poloměru R , jejichž osy se kolmo protínají (Obr. 14) a (Obr. 15).

Výsledek: $\frac{16}{3}R^3, 16R^2$

Příklad 1.62. Vypočítejte obsah části rotačního paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$, kterou z něj vyřízne rovina $z = 0$.

Výsledek: $\pi(5\sqrt{5} - 1)/6$



Příklad 1.63. Vypočítejte obsah části hyperbolického paraboloidu $z = 4 + x^2 - y^2$, kterou z něj vyřízne válcová plocha $x^2 + y^2 = 4$.

Výsledek: $\frac{1}{6}(17\sqrt{17} - 1)\pi$

V příkladech 1.64 – 1.70 vypočítejte obsahy daných ploch.

Příklad 1.64. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 4z = 12 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$.

Výsledek: $3\sqrt{29}$

Příklad 1.65. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z \wedge 2z^2 \leq xy\}$.

Výsledek: $\frac{1}{9}(20 - 3\pi)$

Příklad 1.66. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^{3/2} + z = 1 \wedge z \geq 0\}$.

Výsledek: $\frac{1}{6}(3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10}))\pi$

Příklad 1.67. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 2z \wedge \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$.

Výsledek: $4(2\sqrt{2} - 1)\pi$

Příklad 1.68. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \wedge z \geq 0 \wedge z \leq \sqrt{2}(\frac{1}{2}x + 1)\}$.

Výsledek: 8π

Příklad 1.69. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = a^2 \wedge z \geq 0 \wedge |y| \leq x\}$. ($a > 0$)

Výsledek: $2a^2$

Příklad 1.70. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq ax, z \geq 0\}$ ($a > 0$).

Výsledek: $(\pi - 2)a^2$, (Obr. 13)

Příklad 1.71. Vypočítejte obsah části zemského povrchu (za předpokladu, že jde o kulovou plochu o poloměru $R = 6378$ km), ohraničenou poledníky odpovídajícími západním zeměpisným délkám 30° a 60° a rovnoběžkami odpovídajícími severním zeměpisným šířkám 45° a 60° .

Výsledek: $\frac{1}{12}R^2\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3.38 \cdot 10^6 \text{ km}^2$

Fyzikální aplikace dvojného integrálu

Nechť M je dvourozměrná množina (rovinná deska), jejíž plošná hustota v každém bodě (x, y) je $h(x, y)$.

(I) Hmotnost této množiny je

$$(11) \quad m = \int_M h(x, y) \, dA .$$

(II) Statický moment této množiny vzhledem k ose x , resp. vzhledem k ose y je

$$(12) \quad S_x = \int_M y h(x, y) \, dA, \quad \text{resp.} \quad S_y = \int_M x h(x, y) \, dA .$$

(III) Souřadnice těžiště této množiny (v pravoúhlém souřadnicovém systému) jsou

$$(13) \quad x_T = \frac{S_y}{m}, \quad y_T = \frac{S_x}{m} .$$

(IV) Moment setrvačnosti této množiny vzhledem k ose x , resp. vzhledem k ose y , resp. vzhledem k počátku je

$$(14) \quad \begin{aligned} I_x &= \int_M y^2 h(x, y) \, dA, \quad \text{resp.} \quad I_y = \int_M x^2 h(x, y) \, dA, \\ \text{resp.} \quad I_z &= I_x + I_y = \int_M (x^2 + y^2) h(x, y) \, dA . \end{aligned}$$

Poznámka 1.72. V dalších příkladech budeme vždy v případě homogenní desky (tělesa) předpokládat, že $h(x, y) = 1$ ($h(x, y, z) = 1$).

Příklad 1.73. Najděme souřadnice těžiště nehomogenní rovinné desky ohraničené kružnicí $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$, jejíž plošná hustota v každém bodě (x, y) je rovna vzdálenosti tohoto bodu od počátku $(0, 0)$.

Řešení: Víme, že $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Protože deska je symetrická podle osy x a funkce h je sudá v proměnné y , je zřejmé, že těžiště desky bude ležet na ose x , tj. $y_T = 0$. Pro určení x_T potřebujeme znát celkovou hmotnost desky m a dále statický moment desky vzhledem k ose y (viz (13)). Podle (11) a (12) je

$$m = \int_M \sqrt{x^2 + y^2} \, dA, \quad S_y = \int_M x \sqrt{x^2 + y^2} \, dA .$$

Použitím substituce pomocí polárních souřadnic (4) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^2 + y^2 \leq 2ax, \\ 0 &\leq r^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \leq 2ar \cos \phi, \\ 0 &\leq r \leq 2a \cos \phi \quad \text{a tedy} \quad \phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} m = \int_M \sqrt{x^2 + y^2} \, dA &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2a \cos \phi} r^2 \, dr \right) d\phi = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2a \cos \phi} d\phi = \frac{16}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \phi \, d\phi = \frac{32}{9} a^3, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} S_y = \int_M x \sqrt{x^2 + y^2} \, dA &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2a \cos \phi} r^3 \cos \phi \, dr \right) d\phi = \\ &= 8a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \phi \, d\phi = \frac{64}{15} a^4. \end{aligned}$$

Podle (13) je tedy

$$x_T = \frac{S_y}{m} = \frac{64a^4}{15} \cdot \frac{9}{32a^3} = \frac{6a}{5}.$$

Příklad 1.74. Vypočítejte moment setrvačnosti kruhové desky o poloměru R vzhledem k její libovolné tečně t , jestliže její plošná hustota v každém bodě je rovna vzdálenosti tohoto bodu od tečny t .

Řešení: Zvolme si souřadnicový systém tak, že střed kružnice ohraničující desku je v bodě $(0, R)$, tj. její rovnice je $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ a tečna, ke které budeme moment setrvačnosti počítat, je osa x . Potom plošná hustota desky v každém bodě (x, y) je $h(x, y) = y$. Je tedy

$$I_t = I_x = \int_M y^2 h(x, y) \, dA = \int_M y^3 \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - R)^2 \leq R^2\}$. Použitím substituce pomocí „posunutých“ polárních souřadnic

$$x = r \cos \phi, \quad y = R + r \sin \phi \quad \text{a} \quad J = r,$$

pak dostaneme

$$I_t = \int_M y^3 \, dA = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R (R + r \sin \phi)^3 r \, dr \right) d\phi = \frac{7}{4} \pi R^5.$$

V příkladech 1.75 – 1.79 vypočítejte souřadnice těžiště rovinných homogenních desek:

Příklad 1.75. Deska ohraničená parabolou $y^2 = 2x$ a přímkou $x = a$, ($a > 0$).

Výsledek: $(3a/5, 0)$

Příklad 1.76. Deska ohraničená křivkami $4y = x^2$, $x + y = 3$.

Výsledek: $(-2, 17/5)$

Příklad 1.77. Deska ohraničená křivkami $y = 2x - 3x^2$, $y = -x$.

Výsledek: $(1/2, -1/5)$

Příklad 1.78. Deska ohraničená křivkou $y^2 = x^2 - x^4$, $x \geq 0$.

Výsledek: $(\frac{3}{16}\pi, 0)$

Příklad 1.79. Deska ohraničená křivkou $(x^2 + y^2)^2 = 2x^2y$, $(x \geq 0, y \geq 0)$.

Výsledek: $(\frac{16}{15\pi}, \frac{1}{4})$

Příklad 1.80. Nehomogenní deska má tvar půlkruhu o poloměru R , kde plošná hustota v každém bodě desky je rovna vzdálenosti tohoto bodu od středu kruhu. Určete vzdálenost těžiště desky od středu kruhu.

Výsledek: $\frac{3}{2} \frac{R}{\pi}$

Příklad 1.81. Nehomogenní deska má tvar čtvrtkruhu o poloměru R , kde plošná hustota v každém bodě desky je rovna druhé mocnině vzdálenosti tohoto bodu od středu kruhu. Určete vzdálenost těžiště desky od středu kruhu.

Výsledek: $\frac{8\sqrt{2}}{5} \frac{R}{\pi}$

Příklad 1.82. Vypočítejte moment setrvačnosti kruhové desky o poloměru R a plošné hustotě $h(x, y) = |x||y|$ vzhledem k přímce procházející jejím středem.

Výsledek: $R^6/6$

Příklad 1.83. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní rovinné desky $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge |y| \leq \frac{1}{2}\}$ vzhledem k ose x .

Výsledek: $\frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

Příklad 1.84. Vypočítejte moment setrvačnosti rovinné desky ohraničené křivkami $y = 4 - x^2$ a $y = 0$ vzhledem k ose x , jestliže plošná hustota v každém bodě je rovna vzdálenosti tohoto bodu od osy y .

Výsledek: $64/3$

Příklad 1.85. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní desky ohraničené elipsou $4(x+1)^2 + y^2 = 4$ vzhledem k ose y .

Výsledek: $5\pi/2$

Příklad 1.86. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní rovinné desky $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)\}$, $(a > 0)$ vzhledem k ose x a y .

Výsledek: $I_x = \frac{1}{48}(3\pi - 8)a^4, I_y = \frac{1}{48}(3\pi + 8)a^4$

1.2. Trojné integrály.

Příklad 1.87. *Vypočítejme trojný integrál*

$$\int_W (2x - y + z) \, dV,$$

kde $W = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle \times \langle 2, 3 \rangle$.

Řešení: Funkce $f(x, y, z) = 2x - y + z$ je na trojrozměrném intervalu W spojitá. Užitím Fubiniovy věty převedeme trojný integrál na jednoduchý integrál z dvojného integrálu

$$\int_W (2x - y + z) \, dV = \int_0^1 \left(\int_M (2x - y + z) \, dA \right) dx.$$

K výpočtu dvojného integrálu nyní použijeme opět Fubiniovu větu (pro dvojný integrál) a tím převedeme zadaný trojný integrál na trojnásobný integrál

$$\begin{aligned} \int_W (2x - y + z) \, dV &= \int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 (2x - y + z) \, dz \, dy \, dx = \\ &= \int_0^1 \int_1^2 \left[2xz - yz + \frac{z^2}{2} \right]_{z=2}^{z=3} dy \, dx = \int_0^1 \int_1^2 \left(2x - y + \frac{5}{2} \right) dy \, dx = \\ &= \int_0^1 \left[2xy - \frac{y^2}{2} + \frac{5}{2}y \right]_{y=1}^{y=2} dx = \int_0^1 (2x + 1) \, dx = 2. \end{aligned}$$

Příklad 1.88. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W \left(x^3 y - \frac{z}{y} \right) \, dV,$$

kde $W = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.

Výsledek: $3/4 - 2 \ln 2$

Příklad 1.89. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W xy^2 \sqrt{z} \, dV,$$

kde $W = \langle -2, 1 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle \times \langle 2, 4 \rangle$.

Výsledek: $52(\sqrt{2} - 4)/3$

Příklad 1.90. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W xy^2 z^3 \, dV,$$

kde $W = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 4 \rangle$.

Výsledek: 1152

Příklad 1.91. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W x^2 z e^{x-y+z^2} dV,$$

kde $W = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -2, 0 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Výsledek: $(e^2 - 5)(e^2 - 1)(e - 1)/(2e)$

Příklad 1.92. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W \frac{1}{1+x+y} dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 1\}$.

Řešení: Množina W je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Jeho průmětem do roviny xy je trojúhelník M (Obr. 16) s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Zřejmě $\forall (x, y) \in M$ je $0 \leq z \leq 1 - x - y$. Pomocí Fubiniovy věty můžeme tedy daný trojný integrál převést na dvojný z jednoduchého

$$\int_W \frac{1}{1+x+y} dV = \int_M \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{1+x+y} dz \right) dA.$$

Zapišeme-li množinu M ve tvaru

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

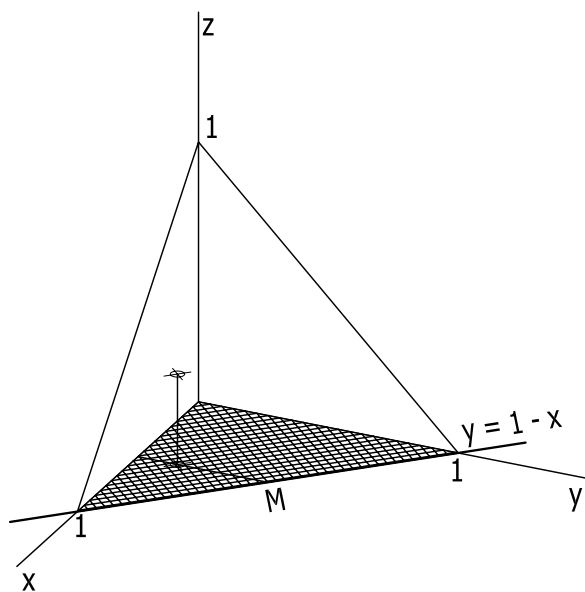
můžeme použitím Fubiniovy věty pro dvojný integrál náš trojný integrál převést na trojnásobný integrál. Potom

$$\begin{aligned} \int_W \frac{1}{1+x+y} dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{1+x+y} dz dy dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z}{1+x+y} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1-x-y}{1+x+y} dy dx = \\ &= \int_0^1 [2 \ln(1+x+y) - y]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 (2 \ln 2 - 2 \ln(x+1) + x - 1) dx = \\ &= \frac{3}{2} - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

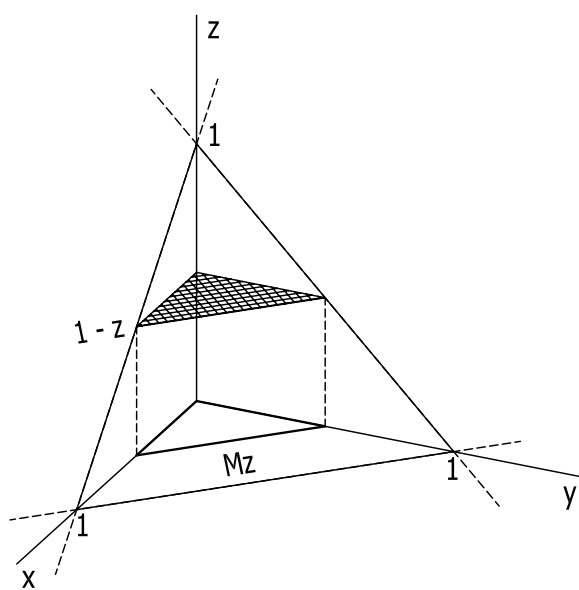
Při výpočtu trojného integrálu můžeme postupovat také např. takto:

Pro libovolné $z \in \langle 0, 1 \rangle$ leží vždy bod (x, y) v trojúhelníku, jehož kolmý průmět do roviny xy ($z = 0$) je trojúhelník M_z s vrcholy $(0, 0)$, $(1-z, 0)$, $(0, 1-z)$ (Obr. 17). Podle Fubiniovy věty můžeme tedy trojný integrál převést na jednoduchý a dvojný, tj.

$$\int_W \frac{1}{1+x+y} dV = \int_0^1 \left(\int_{M_z} \frac{1}{1+x+y} dA \right) dz.$$



Obr. 16



Obr. 17

Zapišeme-li množinu M_z ve tvaru

$$M_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq (1 - z) \wedge 0 \leq y \leq (1 - x - z)\},$$

může opět použitím Fubiniovy věty pro dvojný integrál zadaný trojný integrál převést na trojnásobný integrál

$$\int_W \frac{1}{1+x+y} dV = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} \frac{1}{1+x+y} dy dx dz = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

Příklad 1.93. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W y \cos(x+z) dV,$$

kde W je množina ohraničená plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$.

Řešení: Množina W (Obr. 18) je část válce ohraničeného válcovou plochou $y = \sqrt{x}$ a rovinou $y = 0$. Zdola je ohraničena rovinou $z = 0$ a shora rovinou $x + z = \frac{\pi}{2}$. Kolmý průmět M množiny W do roviny xy je část roviny ohraničená přímkami $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ a parabolou $y = \sqrt{x}$ (Obr. 19),

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{x} \right\}.$$

a $0 \leq z \leq -x + \frac{\pi}{2}$. Potom

$$\begin{aligned} \int_W y \cos(x+z) dV &= \int_M \left(\int_0^{-x+\pi/2} y \cos(x+z) dz \right) dA = \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{x}-x+\pi/2} \int_0^{\pi/2-\sqrt{x}} y \cos(x+z) dz dy dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{x}} [y \sin(x+z)]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x} dy dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{x}} y(1 - \sin x) dy dx = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{y^2}{2} (1 - \sin x) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (x - x \sin x) dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 1.94. Vypočítejte trojný integrál

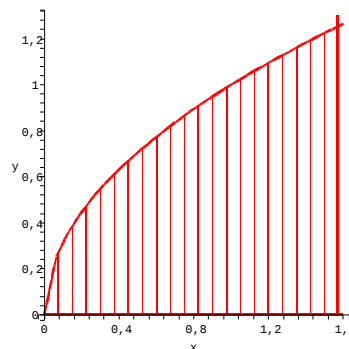
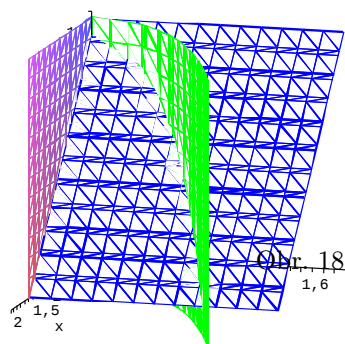
$$\int_W z dV,$$

kde W je množina ohraničená plochami $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 2x$, $z = x^2$.

Výsledek: 32/3

Příklad 1.95. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W z^4 \sin^3 y dV,$$



Obr. 19

kde W je množina ohraničená plochami $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = \pi/2$, $z = 0$, $z = x$.

Výsledek: $\pi^6/45$

Příklad 1.96. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W xy^2 \sin(x + y + z) dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Výsledek: $\pi^4/192 - \pi^2/4 + 2$

Příklad 1.97. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W xyz dV,$$

kde W je množina ohraničená plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 0$, $z = xy$.

Výsledek: $1/96$

Příklad 1.98. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W x^2 dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \leq 1\}$ (Obr. 20).

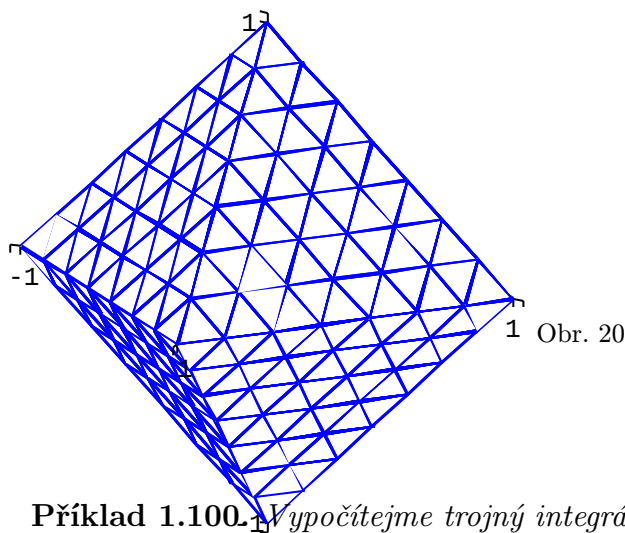
Výsledek: $2/15$

Příklad 1.99. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W \frac{x^3 y z}{(1 + z^2)^2} dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$.

Výsledek: $\frac{1}{16} \ln 5 - \frac{1}{60}$



Příklad 1.100. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W \sqrt{x^2 + y^2} \, dV,$$

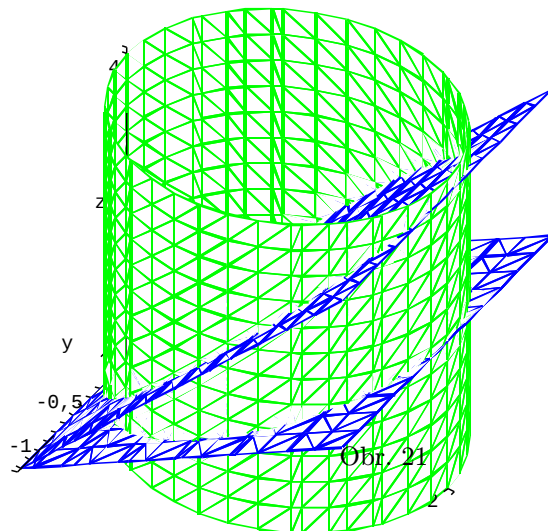
kde $W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \right\} \quad (a > 0).$

Řešení: Množina W je část koule se středem v bodě $(0, 0, 0)$ a poloměrem a , kterou z ní vyřízne kuželová plocha $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pro výpočet tohoto integrálu použijeme substituci pomocí sférických souřadnic

$$(15) \quad x = r \cos \phi \cos \psi, \quad y = r \sin \phi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi \quad \text{a} \quad J = r^2 \cos \psi.$$

Použitím (15) a dosazením do nerovností definujících W dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leq a^2, & \sqrt{x^2 + y^2} &\leq z, \\ r^2 (\cos^2 \psi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \sin^2 \psi) &\leq a^2, & \sqrt{r^2 \cos^2 \psi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} &\leq r \sin \psi, \\ 0 &\leq r \leq a, & \operatorname{tg} \psi &\geq 1, \\ & & \pi/4 &\leq \psi \leq \pi/2. \end{aligned}$$



Pro ϕ jsme nedostali žádnou podmínku, je tedy $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Nyní použitím věty o substituci a současně Fubiniovy věty dostaneme

$$\begin{aligned} \int_W \sqrt{x^2 + y^2} \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{r^2 \cos^2 \psi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} r^2 \cos \psi \, dr \, d\psi \, d\phi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^a r^3 \cos^2 \psi \, dr \, d\psi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \cos^2 \psi \right]_{r=0}^{r=a} d\psi \, d\phi = \\ &= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 \psi \, d\psi \, d\phi = \frac{a^4}{8} \int_0^{2\pi} \left[\psi + \frac{\sin 2\psi}{2} \right]_{\psi=\pi/4}^{\psi=\pi/2} d\phi = \frac{a^4}{16} \pi (\pi - 2). \end{aligned}$$

Příklad 1.101. Vypočítejme trojný integrál

$$\int_W xz \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2x \wedge x \leq z \leq 2x\}$.

Řešení: Množina W je část rotačního válce $x^2 + y^2 \leq 2x$ seříznutého zdola rovinou $z = x$ a shora rovinou $z = 2x$ (Obr 21). Kolmým průmětem W do roviny xy je kruh ohraničený kružnicí $x^2 + y^2 = 2x$.

Pro výpočet integrálu použijeme substituci do cylindrických souřadnic

$$(16) \quad x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = Z \quad \text{a} \quad J = r.$$

Použitím (16) a dosazením do nerovností definujících W dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 2x & x &\leq z \leq 2x, \\ 0 \leq r &\leq 2 \cos \phi, & r \cos \phi &\leq Z \leq 2r \cos \phi. \end{aligned}$$

z podmínky $2 \cos \phi \geq 0$ pak dostáváme $\cos \phi \geq 0$, tj. $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$.

Použitím věty o substituci a současně Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_W xz \, dV &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \phi} \int_{r \cos \phi}^{2r \cos \phi} r^2 Z \cos \phi \, dZ \, dr \, d\phi = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \phi} r^2 \cos \phi \left[\frac{Z^2}{2} \right]_{Z=r \cos \phi}^{Z=2r \cos \phi} dr \, d\phi = \frac{3}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \phi} r^4 \cos^3 \phi \, dr \, d\phi = \\ &= \frac{3}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \phi \left[\frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{r=2 \cos \phi} d\phi = \frac{96}{10} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8 \phi \, d\phi = \frac{21}{8} \pi. \end{aligned}$$

Příklad 1.102. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$.

Výsledek: $\pi/8$

Příklad 1.103. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W (x^2 + y^2) \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \wedge z \geq 0\}$.

Výsledek: $844/15\pi$

Příklad 1.104. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$.

Výsledek: $\pi/10$

Příklad 1.105. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W e^{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Výsledek: $8\pi(e^2 - 1)$

Příklad 1.106. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W (x^2 + y^2 + z^2) \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \wedge x^2 + y^2 \leq 3z^2\}$ ($a > 0$).

Výsledek: $21\pi a^5/10$

Příklad 1.107. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W z \sqrt{x^2 + y^2} \, dV,$$

kde W je množina ohraničená plochami $y = 0$, $z = 0$, $z = a$ ($a > 0$), $x^2 + y^2 = 2x$.

Výsledek: $8a^2/9$

Příklad 1.108. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W (x^2 + y^2) \, dV,$$

kde W je množina ohraničená plochami $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

Výsledek: $16\pi/3$

Příklad 1.109. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W x^2 y^2 z \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.

Výsledek: $\pi/192$

Příklad 1.110. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W (x^2 + y^2) z \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$.

Výsledek: $32\pi/3$

Příklad 1.111. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W (x^2 + y^2 + z^2) \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 2az\}$ ($a > 0$).

Výsledek: $\pi a^5(108\sqrt{3} - 97)/30$

Příklad 1.112. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$.

Výsledek: $3\pi/10$

Příklad 1.113. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W z \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq z^3\}$.

Výsledek: $\pi/28$

Příklad 1.114. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq xy \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$.

Výsledek: $\pi/120$

Příklad 1.115. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$.

Výsledek: $13\pi/10$

Příklad 1.116. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W (x^2 + y^2) \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 1 - z \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$.

Výsledek: $\pi/32 - 1/18$

Příklad 1.117. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W z \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq 1\}$.

Výsledek: $9\pi/4$

Příklad 1.118. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W y \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \wedge z \leq 1 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \wedge y \geq 0\}$.

Výsledek: $7/24 - \pi/16$

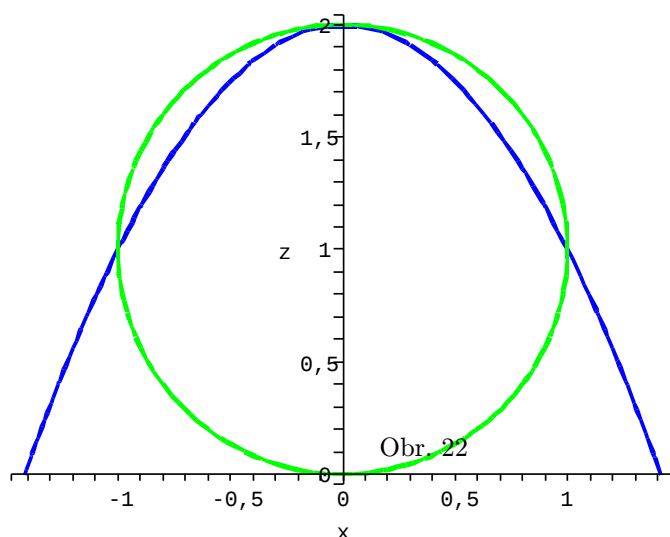
Příklad 1.119. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W y \, dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \geq x \wedge 0 \leq z \leq 2x - x^2 - y^2 \wedge y \geq 0\}$.

Výsledek: $13/60$

Příklad 1.120. Vypočítejme objem tělesa určeného nerovnicemi $x^2 + y^2 \leq 2 - z$ a $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$.



Řešení: Těleso můžeme popsat jako množinu

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \wedge x^2 + y^2 \leq 2 - z\}.$$

Objem množiny (míru množiny) W pak vypočítáme jako

$$\mu(W) = \int_W dV.$$

Těleso, jehož objem počítáme, je průnik koule a rotačního paraboloidu. Řez tělesa rovinou $y = 0$ je na Obr. 22.

Z geometrie víme, že obě plochy jsou rotační a mají společnou osu. Proto jejich průnikem je kružnice. Řešením soustavy dvou rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 2z, \\ x^2 + y^2 &= 2 - z, \end{aligned}$$

zjistíme, že kružnice průniku leží v rovinách o rovnicích $z = 2$ a $z = 1$ s tím, že kružnice v rovině $z = 2$ se redukuje na bod o souřadnicích $(0, 0, 2)$ a v rovině $z = 1$ je průnikem kružnice, jejíž kolmý průmět do roviny xy má rovnici $x^2 + y^2 = 1$. Celé těleso se tedy promítne do roviny xy jako kruh $M: x^2 + y^2 \leq 1$. Pro libovolné $(x, y, z) \in W$ je tedy

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$$

Užitím Fubiniovy věty pro trojný integrál pak dostaneme

$$\begin{aligned}\Omega &= \int_W dV = \int_M \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} dz \right) dA = \\ &= \int_M \left((1 - \sqrt{1-x^2-y^2}) - (2-x^2-y^2) \right) dA = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r - r^3 + r\sqrt{1-r^2} \right) dr d\phi = \frac{7}{6}\pi.\end{aligned}$$

Pro výpočet dvojného integrálu jsme použili substituci do polárních souřadnic (4).

V příkladech 1.121 – 1.125 vypočítejte objemy daných těles.

Příklad 1.121. *Těleso je ohraničeno plochami $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = 1$, $x = 2$.* **Výsledek:** $8/3$

Příklad 1.122. *Těleso je ohraničeno plochami $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.* **Výsledek:** $7/12$

Příklad 1.123. *Těleso je ohraničeno plochami $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, přičemž $z \geq 0$ a $0 < a < b$.* **Výsledek:** $(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)\pi/3$

Příklad 1.124. *Těleso je ohraničeno plochami $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.* **Výsledek:** $32\pi/3$

Příklad 1.125. *Těleso je ohraničeno plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8z$.* **Výsledek:** $80\pi/3$

Fyzikální aplikace trojného integrálu

Nechť W je trojrozměrné těleso, jehož hustota v každém bodě (x, y, z) je $h(x, y, z)$.

(I) Hmotnost tohoto tělesa je

$$(17) \quad m = \int_W h(x, y, z) dV.$$

(II) Statický moment tohoto tělesa vzhledem k rovině xy , resp. vzhledem k rovině xz , resp. vzhledem k rovině yz

$$(18) \quad S_{xy} = \int_W zh(x, y, z) dV, \quad S_{xz} = \int_W yh(x, y, z) dV, \quad S_{yz} = \int_W xh(x, y, z) dV.$$

(III) Souřadnice těžiště tohoto tělesa (v pravoúhlém souřadnicovém systému) jsou

$$(19) \quad x_T = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_T = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_T = \frac{S_{xy}}{m}.$$

(IV) Moment setrvačnosti tohoto tělesa vzhledem k ose x , resp. vzhledem k ose y , resp. vzhledem k ose z je

$$(20) \quad \begin{aligned} I_x &= \int_W (y^2 + z^2) h(x, y, z) dV, \\ I_y &= \int_W (x^2 + z^2) h(x, y, z) dV, \\ I_z &= \int_W (x^2 + y^2) h(x, y, z) dV. \end{aligned}$$

V příkladech 1.126 – 1.130 vypočítejte souřadnice těžiště homogenních těles ohraničených danými plochami.

Příklad 1.126. $x + y + z = 2a$, $x = a$, $y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Výsledek: $(5a/12, 5a/12, 5a/12)$

Příklad 1.127. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

Výsledek: $(0, 0, 1/4)$

Příklad 1.128. $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 1$.

Výsledek: $(0, 0, 2/3)$

Příklad 1.129. $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y = z$.

Výsledek: $(1, 1, 5/3)$

Příklad 1.130. $x^2 + y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ ($a > 0$).

Výsledek: $(0, 0, 5a(6\sqrt{3} + 5)/83)$

Příklad 1.131. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního tělesa ohraničeného plochami $z = x^2 + y^2$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$, $z = 0$ vzhledem k ose x .

Výsledek: $14/45$

Příklad 1.132. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní koule o poloměru R vzhledem k přímkce, která se jí dotýká.

Výsledek: $28\pi R^5/15$

Příklad 1.133. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní kostky o hraně a vzhledem k její libovolné hraně.

Výsledek: $2a^5/3$

Příklad 1.134. Hustota v každém bodě nehomogenní koule o poloměru R je rovna vzdálenosti tohoto bodu od jejího středu. Vypočítejte moment setrvačnosti této koule vzhledem k (libovolné) přímkce, která

a) prochází středem koule,

b) se dotýká povrch koule.

Výsledek: $4\pi R^6/9$, $13\pi R^6/9$