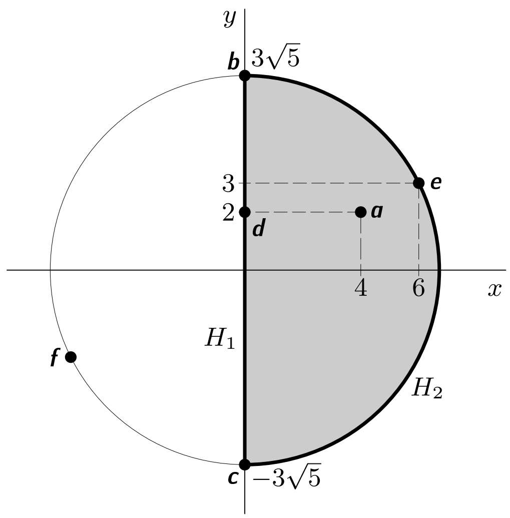
5.

Množina M je kompaktní (tj. uzavřená a omezená) – jde o uzavřený půlkruh, viz obrázek. Funkce g je na M spojitá. Proto podle Weierstrassovy věty globální extrémy funkce g na M existují.



Hledejme „podezřelé" body.

Z vnitřních bodů množiny M zařadíme mezi podezřelé ty body, v nichž by funkce g mohla mít lokální extrémy – jsou to stacionární body funkce g (funkce g je na celém $\mathbf{R}^2$ diferencovatelná):

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x-8, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y-4; \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \iff (x,y) = (4,2) = \boldsymbol{a}$$

Z bodů hranice $H = \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \cup H_1 \cup H_2$ množiny M (viz obrázek) zařadíme mezi podezřelé ty body, v nichž by funkce g mohla mít vázané lokální extrémy vzhledem k H.

Úsečku H_1 (bez krajních bodů) parametrizujeme: $x = 0,\ y = t,\ t \in \left(-3\sqrt{5},\, 3\sqrt{5}\right)$

$$g(0,t) = t^2 - 4t = h_1(t); \quad h_1'(t) = 2t - 4 = 0 \iff t = 2; \quad \text{odtud } \boldsymbol{d} = (0,2)$$

Půlkružnici H_2 (bez krajních bodů) vyšetříme metodou Lagrangeových multiplikátorů:

$$\Phi_\lambda(x,y) = x^2 + y^2 - 8x - 4y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 45\right)$$
$$\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial x}(x,y) = 2x - 8 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial y}(x,y) = 2y - 4 + 2\lambda y$$

Soustavu rovnic

$$\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial x}(x,y) = 0 \ \wedge\ \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial y}(x,y) = 0 \ \wedge\ x^2 + y^2 = 45$$

vyřešíme tak, že z prvních dvou rovnic vyjádříme

$$x = \frac{4}{1+\lambda}, \quad y = \frac{2}{1+\lambda}, \tag{1}$$

dosadíme do třetí rovnice

$$\left(\frac{4}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^2 = 45, \quad \text{odkud} \quad \lambda \in \left\{-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{5}{3}\right\}.$$

Pro $\lambda = -\frac{1}{3}$, resp. $\lambda = -\frac{5}{3}$ získáme z (1) body

$$\boldsymbol{e} = (6, 3), \quad \boldsymbol{f} = (-6, -3);$$

z nich však pouze bod $\boldsymbol{e}$ leží na půlkružnici H_2.

Porovnáme hodnoty funkce g v nalezených podezřelých bodech:

$$\begin{aligned}
g(\boldsymbol{a}) &= g(4, 2) = -20 \\
g(\boldsymbol{b}) &= g\big(0, 3\sqrt{5}\,\big) = 45 - 12\sqrt{5} \\
g(\boldsymbol{c}) &= g\big(0, -3\sqrt{5}\,\big) = 45 + 12\sqrt{5} \\
g(\boldsymbol{d}) &= g(0, 2) = -4 \\
g(\boldsymbol{e}) &= g(6, 3) = -15
\end{aligned}$$

Z těchto hodnot je největší $g(\boldsymbol{c}) = g\big(0, -3\sqrt{5}\,\big) = 45 + 12\sqrt{5}$ – globální maximum funkce g na množině M, nejmenší je $g(\boldsymbol{a}) = g(4, 2) = -20$ – globální minimum funkce g na množině M.