Řešení vzorové písemky z M1A

Poznámky:

1. Řešení úloh ze vzorové písemky jsou formulována dosti podrobně (podobným způsobem jako u řešených příkladů ve skriptech). U zkoušky lze jednotlivé kroky postupu komentovat stručněji.
2. V řadě případů lze postupovat i jiným způsobem, než jak je uvedeno ve vzorových řešeních.

Řešení vzorové písemky z M1A – příklad 1

1. Je dána funkce
$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x-2}{x}.$$

4 b. **a)** Vypočtěte limity: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x)$. Určete všechny asymptoty grafu funkce f.

4 b. **b)** Najděte všechny body grafu funkce f, v nichž je tečna grafu kolmá k přímce o rovnici $5x - y + 3 = 0$.

5 b. **c)** Určete všechny maximální intervaly, na nichž je f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, a všechny inflexní body grafu funkce f.

Řešení.

a) Zřejmě $Df = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Protože
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0_+} \frac{x-2}{x} = \frac{-2}{+0} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0_-} \frac{x-2}{x} = \frac{-2}{-0} = +\infty,$$
dostaneme
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \tfrac{1}{4}\pi,$$
$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{z\to-\infty} \operatorname{arccotg} z = \pi, \qquad \lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{z\to+\infty} \operatorname{arccotg} z = 0.$$
Ze spojitosti funkce f a z hodnot vypočtených limit vyplývá, že jedinou asymptotou grafu funkce f je přímka
$$y = \tfrac{1}{4}\pi \qquad \text{pro } x \to +\infty \text{ i pro } x \to +\infty.$$
[Přímka $x = 0$ není asymptotou grafu funkce f, neboť obě jednostranné limity funkce f v bodě 0 jsou vlastní.]

b) Rovnici dané přímky (označme ji p) lze psát ve tvaru $y = 5x + 3$, tudíž má směrnici $k_p = 5$. Tečna t grafu funkce f má být kolmá k přímce p, tedy pro její směrnici k_t platí $k_p \cdot k_t = -1$; odtud $k_t = -\frac{1}{5}$. Označme $T = [\bar{x}, f(\bar{x})]$ hledaný bod dotyku. Pak $k_t = f'(\bar{x})$, a tedy hledáme všechna čísla $\bar{x} \in Df$, pro něž $f'(\bar{x}) = -\frac{1}{5}$. Vypočteme
$$f'(x) = -\frac{1}{1 + \left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2} \cdot \frac{1 \cdot x - (x-2) \cdot 1}{x^2} = -\frac{2}{x^2 + (x-2)^2} = -\frac{1}{x^2 - 2x + 2}, \qquad x \in Df;$$
pak
$$-\frac{1}{\bar{x}^2 - 2\bar{x} + 2} = -\frac{1}{5} \iff \bar{x}^2 - 2\bar{x} - 3 = 0 \iff \bar{x} = -1 \vee \bar{x} = 3.$$
Body grafu funkce f s požadovanou vlastností jsou dva:
$$T_1 = [-1, \operatorname{arccotg} 3], \qquad T_2 = \left[3, \operatorname{arccotg} \tfrac{1}{3}\right].$$

c) Vypočteme
$$f''(x) = \left[-(x^2 - 2x + 2)^{-1}\right]' = -(-1)(x^2 - 2x + 2)^{-2} \cdot (2x - 2) = \frac{2(x-1)}{(x^2 - 2x + 2)^2}, \qquad x \in Df.$$
Platí
$$f''(x) = 0 \iff x = 1.$$
Znaménko čísla $f''(x)$ pro každé $x \in Df = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ zapíšeme do tabulky:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$

Odtud a z toho, že funkce f je spojitá v bodě 1, plyne:
$$f \text{ je ryze konvexní na intervalu } \langle 1, +\infty),$$
$$f \text{ je ryze konkávní na intervalech } (-\infty, 0) \text{ a } (0, 1\rangle.$$
Inflexním bodem grafu funkce f je bod
$$[1, f(1)] = [1, \operatorname{arccotg}(-1)] = \left[1, \tfrac{3}{4}\pi\right].$$

Řešení vzorové písemky z M1A – příklad 2

2. Je dána množina $\mathscr{M}$ všech pětiúhelníků daného obvodu 1 m, které jsou sjednocením obdélníku a rovnostranného trojúhelníku, přičemž obdélník a trojúhelník mají jednu společnou stranu.

5 b. **a)** Najděte funkci S proměnné a, která vyjadřuje závislost obsahu pětiúhelníku z množiny $\mathscr{M}$ (v m^2) na délce a strany příslušného trojúhelníku (v metrech).

2 b. **b)** Určete definiční obor DS a vypočtěte derivaci S' funkce S.

5 b. **c)** Najděte bod $a_0 \in DS$, v němž má funkce S globální maximum. Ověřte, že jde opravdu o globální maximum. Určete oba rozměry obdélníkové části pětiúhelníku z množiny $\mathscr{M}$, který má maximální obsah.

Řešení.

a) Pětiúhelník z množiny $\mathscr{M}$ je sjednocením obdélníku o rozměrech a, b (v metrech) a rovnostranného trojúhelníku o straně délky a. Veličiny a, b jsou na sobě vzájemně závislé, neboť pro obvod o pětiúhelníku platí

$$o = 3a + 2b = 1. \tag{1}$$

Obdélník má obsah

$$S_1 = ab,$$

rovnostranný trojúhelník má obsah

$$S_2 = \frac{1}{2}\, a \cdot a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2$$

a obsah pětiúhelníku je

$$S = S_1 + S_2 = \tfrac{1}{4}\big[4ab + \sqrt{3}\, a^2\big]. \tag{2}$$

Hledanou funkci S získáme tak, že z (1) vyjádříme

$$b = \tfrac{1}{2}(1 - 3a) \tag{3}$$

a toto vyjádření dosadíme do (2):

$$S(a) = \tfrac{1}{4}\big[2a(1-3a) + \sqrt{3}\, a^2\big] = \tfrac{1}{4}\big[2a - \big(6-\sqrt{3}\big)a^2\big].$$

b) Definiční obor DS funkce S určíme z podmínek $a > 0$, $b > 0$. Podle (3) je

$$a > 0 \wedge b = \tfrac{1}{2}(1-3a) > 0 \iff 0 < a < \tfrac{1}{3},$$

a tedy

$$DS = \big(0,\, \tfrac{1}{3}\big).$$

Vypočteme

$$S'(a) = \tfrac{1}{4}\big[2 - \big(6-\sqrt{3}\big)\cdot 2a\big] = \tfrac{1}{2}\big[1 - \big(6-\sqrt{3}\big)a\big], \quad a \in DS.$$

c) Vypočteme

$$S'(a) = 0 \iff a = a_0 = \frac{1}{6-\sqrt{3}}.$$

Protože $1 < \sqrt{3} < 2$, je

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6-1} < a_0 = \frac{1}{6-\sqrt{3}} < \frac{1}{6-2} = \frac{1}{4},$$

a tedy vypočtené číslo a_0 je prvkem intervalu $\big(\frac{1}{5},\, \frac{1}{4}\big)$, neboli i intervalu $DS = \big(0,\, \frac{1}{3}\big)$.
Znaménko čísla $S'(a)$ pro každé $a \in DS = \big(0,\, \frac{1}{3}\big)$ zapíšeme do tabulky:

a	$(0,\, a_0)$	a_0	$\big(a_0,\, \frac{1}{3}\big)$
$S'(a)$	$+$	0	$-$

Odtud vyplývá, že funkce S je rostoucí na intervalu $(0,\, a_0\rangle$ a klesající na intervalu $\langle a_0,\, \frac{1}{3}\big)$, a proto má v bodě a_0 globální maximum.
Rozměry obdélníkové části pětiúhelníku z množiny $\mathscr{M}$, který má maximální obsah, jsou (v metrech)

$$a_0 = \frac{1}{6-\sqrt{3}} = \frac{6+\sqrt{3}}{33}, \qquad b_0 = \frac{1-3a_0}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{22}.$$

Řešení vzorové písemky z M1A – příklad 3

3. Nechť $\lambda \in \mathbf{R}$ je parametr. Jsou dány vektory

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,\ -1,\ 4), \quad \boldsymbol{u}_2 = (1,\ \lambda,\ -6), \quad \boldsymbol{u}_3 = (6,\ 9,\ \lambda), \quad \boldsymbol{v} = (3,\ 7,\ 2).$$

5 b. **a)** Najděte množinu M všech hodnot parametru λ, pro něž je tříčlenná skupina vektorů $\langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle$ bází vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$.

3 b. **b)** Pro $\lambda = 9$ vyjádřete vektor $\boldsymbol{v}$ jako lineární kombinaci dvojčlenné skupiny $\langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle$.

5 b. **c)** Najděte všechny hodnoty parametru λ, pro něž vektor $\boldsymbol{v}$ není lineární kombinací tříčlenné skupiny $\langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3 \rangle$.

Řešení.

a) Vypočteme

$$\begin{vmatrix} 1, & -1, & 4 \\ 1, & \lambda, & -6 \\ 6, & 9, & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 36 + 36 - 24\lambda + 54 + \lambda = \lambda^2 - 23\lambda + 126 = (\lambda - 9)(\lambda - 14).$$

Protože $\dim \mathbf{R}^3 = 3$, tříčlenná skupina $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ je bází vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, právě když je lineárně nezávislá; to nastane, právě když je determinant nenulový, tj. právě když $\lambda \neq 9 \wedge \lambda \neq 14$. Tedy

$$M = \mathbf{R} \setminus \{9, 14\}.$$

b) Nechť $\lambda = 9$, tj. $\boldsymbol{u}_2 = (1, 9, -6)$. Hledáme čísla $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}.$$

Tato vektorová rovnice je ekvivalentní se soustavou tří lineárních rovnic s neznámými α_1, α_2. V rozšířené matici této soustavy jsou složky vektorů $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}$ zapsány ve sloupcích; dostaneme

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1, & 1 & 3 \\ -1, & 9 & 7 \\ 4, & -6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1, & 1 & 3 \\ 0, & 10 & 10 \\ 0, & -10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1, & 1 & 3 \\ 0, & 10 & 10 \end{array}\right).$$

Soustava

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \quad \alpha_2 &= 3 \\ 10\alpha_2 &= 10 \end{aligned}$$

má řešení $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 2$. Tedy

$$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2.$$

c) Z a) víme, že pro $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{9, 14\}$ je tříčlenná skupina $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ bází vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, a tedy libovolný vektor z $\mathbf{R}^3$ je lineární kombinací báze.

Z b) víme, že pro $\lambda = 9$ je daný vektor $\boldsymbol{v}$ lineární kombinací dvojčlenné skupiny $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$, a tedy i tříčlenné skupiny $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ (např. $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + 0\boldsymbol{u}_3$).

Nechť $\lambda = 14$, tj. $\boldsymbol{u}_2 = (1, 14, -6)$, $\boldsymbol{u}_3 = (6, 9, 14)$. Vektor $\boldsymbol{v}$ je lineární kombinací tříčlenné skupiny $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$, právě když existují čísla $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbf{R}$ taková, že $\beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 + \beta_3 \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}$. Tato vektorová rovnice je ekvivalentní se soustavou tří lineárních rovnic s neznámými β_1, β_2, β_3. Pro rozšířenou matici této soustavy dostaneme

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & 6 & 3 \\ -1, & 14, & 9 & 7 \\ 4, & -6, & 14 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & 6 & 3 \\ 0, & 15, & 15 & 10 \\ 0, & -10, & -10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & 6 & 3 \\ 0, & 15, & 15 & 10 \\ 0, & 0, & 0 & -10 \end{array}\right).$$

Protože matice soustavy má hodnost $h = 2$, zatímco rozšířená matice soustavy má hodnost $h' = 3$, soustava nemá řešení, a tedy pro $\lambda = 14$ vektor $\boldsymbol{v}$ není lineární kombinací skupiny $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$.

Závěr: Vektor $\boldsymbol{v}$ není lineární kombinací skupiny $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$, právě když

$$\lambda = 14.$$

Řešení vzorové písemky z M1A – příklad 4

4. V prostoru jsou dány body

$$A = [1,\, 1,\, -3], \quad B = [-2,\, 0,\, 1], \quad C = [3,\, 4,\, -1], \quad D = [8,\, 3,\, 5].$$

| 4 b. | **a)** Určete vzájemnou polohu přímky p procházející body A, B a přímky q procházející body C, D.

| 4 b. | **b)** Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC.

| 4 b. | **c)** Najděte bod D' souměrně sdružený s bodem D podle roviny ϱ procházející body A, B, C.

Řešení.

a) Směrový vektor přímky p je (např.) vektor $\boldsymbol{u} = B - A = (-3,\, -1,\, 4)$, směrový vektor přímky q je (např.) vektor $\boldsymbol{v} = D - C = (5,\, -1,\, 6)$. Protože dvojice vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ je lineárně nezávislá, přímky p, q jsou buď různoběžné, nebo mimoběžné.

Označme $\boldsymbol{w} = C - A = (2,\, 3,\, 2)$. Je-li trojice $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ lineárně závislá, jsou přímky p, q různoběžné, v opačném případě jsou mimoběžné.

O lineární závislosti, popř. nezávislosti trojice vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ rozhodneme např. výpočtem determinantu:

$$\begin{vmatrix} -3, & -1, & 4 \\ 5, & -1, & 6 \\ 2, & 3, & 2 \end{vmatrix} = 6 + 60 - 12 + 8 + 54 + 10 = 126.$$

Protože tento determinant je nenulový, trojice $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ je lineárně nezávislá, a tedy přímky p, q jsou mimoběžné.

b) Pro obsah S trojúhelníku ABC platí

$$S = \tfrac{1}{2}\, |(B - A) \times (C - A)| = \tfrac{1}{2}\, |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}|\, .$$

Vypočteme

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} = \left(\begin{vmatrix} -1, & 4 \\ 3, & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -3, & 4 \\ 2, & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3, & -1 \\ 2, & 3 \end{vmatrix} \right) = (-14,\, 14,\, -7) = -7(2,\, -2,\, 1).$$

Odtud

$$S = \tfrac{1}{2}|-7(2,\, -2,\, 1)| = \tfrac{1}{2} \cdot |-7|\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \tfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = \tfrac{21}{2}.$$

c) Protože vektor $\boldsymbol{n}_\varrho = (2,\, -2,\, 1)$ je normálový vektor roviny ϱ, lze obecnou rovnici této roviny psát ve tvaru $2x - 2y + z + d = 0$; dosadíme-li do ní souřadnice (např.) bodu B, dostaneme $d = 3$. Obecná rovnice roviny ϱ tedy je

$$2x - 2y + z + 3 = 0.$$

Hledejme nejprve kolmý průmět R bodu D do roviny ϱ. Přímka r procházející bodem D a kolmá k rovině ϱ má vektorovou rovnici

$$X = [8,\, 3,\, 5] + t(2,\, -2,\, 1).$$

Průsečíkem přímky r s rovinou ϱ je hledaný bod $R = [8 + 2t,\, 3 - 2t,\, 5 + t]$, kde t je řešením rovnice

$$2(8 + 2t) - 2(3 - 2t) + (5 + t) + 3 = 0,$$

po úpravě $9t + 18 = 0$, a tedy $t = -2$. Odtud

$$R = [4,\, 7,\, 3].$$

Pro bod D' souměrně sdružený s bodem D podle roviny ϱ platí

$$D' = R + (R - D) = [4,\, 7,\, 3] + (-4,\, 4,\, -2) = [0,\, 11,\, 1].$$