

Test M3A: Ukázka 1

Otázka 1 (4 b.) Nechť $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \leq 1 \wedge y \leq 0\}$. Dvojný integrál $\int_M f(x, y) \, dA$, kde f je libovolná funkce dvou proměnných spojitá na M , je roven

- a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{3}}^0 f(x, y) \, dy \, dx$ b) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-9y^2}}^0 f(x, y) \, dx \, dy$
- c) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x, y) \, dx \, dy$ d) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{3}\sqrt{1-4x^2}}^0 f(x, y) \, dy \, dx$
- e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{3}\sqrt{1-4x^2}}^0 f(x, y) \, dy \, dx$

Otázka 2 (4 b.) Rovinný obrazec je ohraničen křivkou $(x^2 + y^2)^4 = 2y^7$. Užitím substituce do polárních souřadnic ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$) zjistíme, že jeho obsah je roven hodnotě

- a) $2 \int_0^{\pi/2} \sin^{14} \varphi \, d\varphi$ b) $2 \int_0^{\pi} \sin^7 \varphi \, d\varphi$
- c) $2 \int_0^{\pi} \sin^{14} \varphi \, d\varphi$ d) $2 \int_0^{2\pi} \sin^{14} \varphi \, d\varphi$
- e) $\int_0^{\pi} \sin^7 \varphi \, d\varphi$

Otázka 3 (8 b.) Objem válcového tělesa

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi \wedge 0 \leq y \leq \sin x \wedge 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \right\}$$

je roven hodnotě dvojnásobného integrálu

- a) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$ b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{x^2+y^2} \sin x \, dy \, dx$
- c) $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ d) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(x^2+y^2)} dy \, dx$
- e) $\int_0^{\sin x} \int_0^{\pi/2} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$

Otázka 4 (8 b.) Objem tělesa

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0 \right\}$$

je roven hodnotě trojnásobného integrálu

a) $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^\varrho \varrho \, dz \, d\varrho \, d\varphi$ b) $\int_0^{\pi/2} \int_{-1}^1 \int_0^\varrho \varrho \, dz \, d\varrho \, d\varphi$

c) $\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^\varrho \varrho \, dz \, d\varrho \, d\varphi$ d) $\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{\varrho^2} \varrho \, dz \, d\varrho \, d\varphi$

e) $\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^\varrho \varrho^2 \, dz \, d\varrho \, d\varphi$

[Správně: d – c – a – c]