

BLOK 1 (25 BODŮ)

Příklad 1 (16 b.) Pro funkci $f(x) = \frac{1}{e^{x^2}}$ určete

- a) (2 b) definiční obor a limity v jeho krajních bodech, průsečíky grafu f s osami souřadnic a intervaly, na kterých je funkce kladná či záporná;
- b) (4 b) intervaly, na kterých je funkce rostoucí/klesající, a lokální extrémy;
- c) (6 b) intervaly, na kterých je funkce konvexní a konkávní, inflexní body a obor hodnot funkce;
- d) (4 b) asymptoty a nakreslete graf funkce f .

Příklad 2 (3 b.) Body $[-1, \frac{1}{e}]$, $[0, 1]$, $[1, \frac{1}{e}]$ proložte interpolační polynom.

Příklad 3 (6 b.) Newtonovou metodou vypočítejte přibližné řešení E_2 (tj. druhou iteraci) rovnice excentrické anomálie

$$E = M + e \sin E$$

planety Země pro hodnoty $e = 0.0167$ a $M = 60^\circ$. Hodnoty anomálií E a M dosazujte v *obloukové míře*. Počáteční E_0 volte M .

BLOK 2 (25 BODŮ)

Příklad 4 (10 b.) Je dán čtyřstěn ABCD, $A=[0,0,0]$, $B=[1,-7,0]$, $C=[3,-1,0]$, $D=[1,-1,6]$.

- a) (2 b) Pomocí smíšeného (vnějšího) součinu určete objem čtyřstěnu ABCD.
- b) (3 b) Napište obecnou rovnici roviny ϱ , která je rovnoběžná s hranami AD a BC a prochází bodem $[5, 8, 10]$.
- c) (2 b) Vypočítejte vzdálenost hrany AD od roviny ϱ .
- d) (3 b) Napište rovnici hrany CD a určete její průsečík s rovinou ϱ .

Příklad 5 (9 b.) Jsou zadány body $[-1, 0]$, $[1, 2]$, $[2, 4]$, $[3, 3]$. Metodou nejmenších čtverců jimi proložte přímku $y = ax + b$. Načrtněte graf s body a přímkou.

Příklad 6 (6 b.) Určete vlastní čísla a vlastní vektory délky $\sqrt{2}$ matice $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Tvoří tyto vektory bázi prostoru $\mathbb{R}^2$? Odpověď zdůvodněte.

BODY Z PÍSEMKY:

BODY Z TESTŮ:

CELKEM:

ZNÁMKA:

Řešení

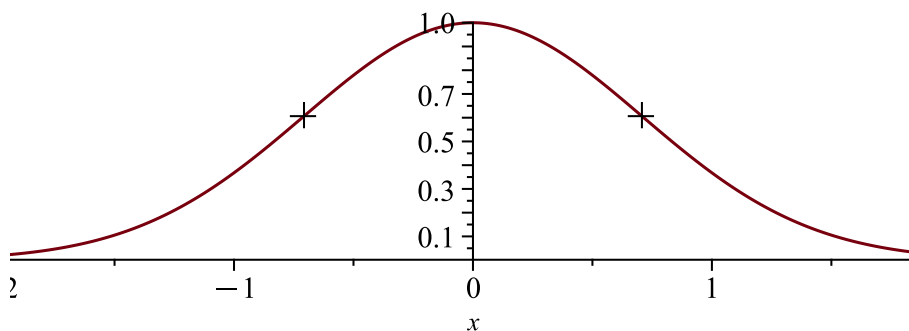
Příklad 1:

a) $D_f = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, průsečík s osou y je bod $[0, 1]$, průsečík s osou x neexistuje, funkce je na D_f kladná.

b) Jest $f'(x) = \frac{-2x}{e^{x^2}}$, proto $f'(x) > 0$ pro $x < 0$, f je rostoucí; $f'(x) < 0$ pro $x > 0$, f je klesající; dále $f'(0) = 0$. Funkce f má v $x = 0$ ostré lokální maximum s hodnotou $f(0) = 1$.

c) Jest $f''(x) = \frac{-2e^{x^2} - (-2x)2xe^{x^2}}{e^{2x^2}} = 2\frac{(2x^2 - 1)}{e^{x^2}}$. Odtud $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -\sqrt{2}/2)$ a pro $x \in (\sqrt{2}/2, +\infty)$ a $f''(x) = 0$ pro $x = \pm\sqrt{2}/2$. Funkce f je konkávní na intervalu $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ a konvexní na intervalu $(-\infty, -\sqrt{2}/2]$ a na intervalu $[\sqrt{2}/2, +\infty)$, inflexní body $[\pm\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e}]$. Obor hodnot $(0, 1]$.

d) Směrnice k šikmé asymptoty $y = kx + q$ je $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^{x^2}} = 0$, pak $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 0) = 0$. Asymptota $y = 0$ je také asymptotou pro $x \rightarrow +\infty$.



Příklad 2: Polynom $p(x) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)x$. Dosazením zadaných souřadnic

odvodíme soustavu rovnic pro neznámé $(a_0, a_1, a_2)^T$ s rozšířenou maticí $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \frac{1}{e} \end{array} \right)$

a s řešením $a_0 = \frac{1}{e}$, $a_1 = 1 - \frac{1}{e}$, $a_2 = \frac{1}{e} - 1$,

tj. $p(x) = \frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right)(x+1) - \left(1 - \frac{1}{e}\right)(x+1)x = \left(\frac{1}{e} - 1\right)x^2 + 1$.

Příklad 3: $f(E) = M - E + e \sin E$, $f'(E) = -1 + e \cos E$, $E_{k+1} = E_k - \frac{M - E_k + e \sin E_k}{-1 + e \cos E_k}$

k	E_k	E_{k+1}	$f(E_k)$	$f'(E_k)$
0	1.04719755120	1.06178195521	0.014462624	-0.991650
1	1.06178195521	1.06178040013	-1.54243×10^{-6}	-0.991862
2	1.06178040013	1.06178040013	-1.76327×10^{-14}	-0.991862

Příklad 4: Necht' $\vec{u} = \vec{AB} = (1, -7, 0)$, $\vec{v} = \vec{AC} = (3, -1, 0)$, $\vec{w} = \vec{AD} = (1, -1, 6)$.

a) Objem V_{ABCD} čtyřstěnu:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & -7 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-6 + 126| = 20.$$

b) Definujme $\vec{r} = \vec{BC} = (2, 6, 0)$. Pak normálový vektor roviny ϱ je například $\vec{w} \times \vec{r} = (-36, 12, 8)$ a obecná rovnice roviny ϱ je $9x - 3y - 2z + d = 0$. Z $[5, 8, 10] \in \varrho$ plyne $45 - 24 - 20 + d = 0$ a $\varrho: 9x - 3y - 2z - 1 = 0$.

c) Postačí vypočítat vzdálenost bodu A od roviny ϱ . Například výpočtem vzdálenosti mezi A a průsečíkem kolmice spuštěné z bodu A na rovinu ϱ nebo dle vztahu z oficiálního taháku

$$d(A, \varrho) = \frac{|0 + 0 + 0 - 1|}{\sqrt{9^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{94}} = \frac{\sqrt{94}}{94}.$$

d) Definujme $\vec{s} = \vec{CD} = (-2, 0, 6)$. Rovnice přímky p , v níž leží hrana CD , je $X = C + t\vec{s} = [3, -1, 0] + t(-2, 0, 6)$, $t \in \mathbb{R}$. Dosazením do rovnice roviny ϱ odvodíme

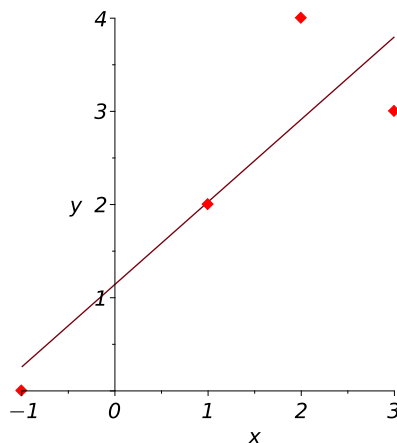
$$9(3-2t) - 3(-1) - 2 \cdot 6t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{29}{30} \Rightarrow P = [3, -1, 0] + \frac{29}{30}(-2, 0, 6) = \left[\frac{16}{15}, -1, \frac{29}{5} \right],$$

kde P je hledaný průsečík.

Příklad 5: Sestavme vektory $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\vec{v}_x = (-1, 1, 2, 3)^T$, $\vec{v}_y = (0, 2, 4, 3)^T$ a soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 9 \\ 5 & 15 & 19 \end{array} \right)$$

s řešením $a = \frac{8}{7}$, $b = \frac{31}{35}$, tj. $y = \frac{8}{7} + \frac{31}{35}x$.



Příklad 6: Charakteristická rovnice $\begin{vmatrix} -4 - \lambda & 3 \\ 3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 + \lambda)^2 - 9 = 0$, tj. $|4 + \lambda| = 3$, má řešení $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = -1$.

Hledaný vlastní vektor v_1 příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = -7$ řeší homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ a má velikost $\sqrt{2}$, tj. $v_1 = (-1, 1)$.

Hledaný vlastní vektor v_2 příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = -1$ řeší homogenní soustavu s maticí $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ a má velikost $\sqrt{2}$, tj. $v_2 = (1, 1)$.

Prostor $\mathbb{R}^2$ má dimenzi dvě, vektory v_1 a v_2 jsou lineárně nezávislé, tvoří jeho bázi.