

BLOK 1 (25 BODŮ)

Příklad 1 (21 b.) Pro funkci $f(x) = \frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{4}$ určete

a) (5 b.) definiční obor, průsečíky nebo body dotyku grafu f s osami souřadnic, intervaly, na kterých je funkce kladná či záporná, a zda je sudá nebo lichá (zdůvodněte);

b) (4 b.) intervaly, na kterých je funkce rostoucí/klesající, a lokální extrémy (včetně hodnoty funkce f); *Poznámka: Pro kontrolu: $f'(-1) = 6/25 = f'(1)$, $f'(3) = -10/169$;*

c) (5 b.) intervaly, na kterých je funkce konvexní nebo konkávní, souřadnice inflexních bodů grafu funkce; *Poznámka: Pro kontrolu: $f''(-1) = 44/125$, $f''(2) = -1/8$;*

d) (5 b.) svislé a šikmé asymptoty (výpočet; pokud zjistíte, že neexistují, toto zjištění zapište) a nakreslete graf funkce f ;

e) (2 b.) globální extrémy funkce f a obor hodnot.

Řešení: a) $D_f = (-\infty, +\infty)$.

Graf f protíná osu y v $[0, -1/4]$ a osu x v kořenech polynomu $x^2 - 8x + 4$, tj. $[4 - 2\sqrt{3}, 0]$ a $[4 + 2\sqrt{3}, 0]$.

Kladná na $(4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$, záporná na $(-\infty, 4 - 2\sqrt{3})$ a $(4 + 2\sqrt{3}, +\infty)$.

Ani sudá ani lichá: $\frac{2(-x)}{(-x)^2+4} - \frac{1}{4} = -\frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{4} \neq -\left(\frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{4}\right)$.

$$\text{b) } f'(x) = \frac{2(x^2+4) - 2x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x) < 0$ na $(-\infty, -2)$ a na $(2, +\infty)$, tj. f je zde klesající (včetně krajních bodů $x = -2$ a $x = 2$), nikoli však na sjednocení intervalů. Rostoucí na $[-2, 2]$.

Ostré lokální min. $x = -2$, $f(-2) = -3/4$, ostré lokální max. $x = 2$, $f(2) = 1/4$.

$$\begin{aligned} \text{c) } f''(x) &= \frac{-4x(x^2+4)^2 - (-2x^2+8)2(x^2+4)2x}{(x^2+4)^4} = \frac{-4x(x^2+4) + (2x^2-8)4x}{(x^2+4)^3} \\ &= \frac{4x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}. \end{aligned}$$

Jest $f''(x) = 0$ pro $x = \pm 2\sqrt{3}$ a $x = 0$, tj. funkce je na intervalu $(-\infty, -2\sqrt{3}]$ konkávní, na $[-2\sqrt{3}, 0]$ konvexní, na $[0, 2\sqrt{3}]$ konkávní a na $[2\sqrt{3}, +\infty]$ konvexní,

Inflexní body $[-2\sqrt{3}, -(1+\sqrt{3})/4]$, $[0, -1/4]$ a $[2\sqrt{3}, (-1+\sqrt{3})/4]$.

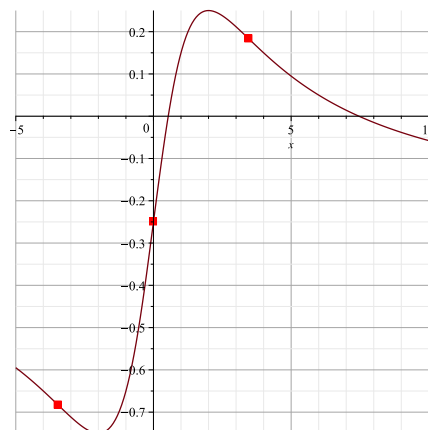
d) Svislé asymptoty nemá.

Šikmá asymptota $y = kx + q = 0$. Výpočet k a q :

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{4}}{x} = 0$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4}$$

Totéž pro $x \rightarrow +\infty$. Graf



e) Z průběhu plyne, že lokální extrémy jsou zároveň i extrémy globální. Tudíž obor hodnot je určen hodnotami funkce v globálních extrémech, tj. $H_f = [-3/4, 1/4]$.

Příklad 2 (4 b.) K funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ určete Taylorův polynom T_2 (tj. polynom druhého stupně) v bodě $a = 1$. Odhadněte hodnotu $\left| f\left(\frac{3}{2}\right) - T_2\left(\frac{3}{2}\right) \right|$ pomocí Lagrangeova zbytku R_3 a odhad srovnejte se skutečnou hodnotou $\left| f\left(\frac{3}{2}\right) - T_2\left(\frac{3}{2}\right) \right|$.

Řešení: $f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$, $f'''(x) = -6x^{-4}$.
Tedy $T_2(x) = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 = 2 - x + (x - 1)^2$.

Absolutní hodnota chyby a její odhad:

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{3}{2}\right) - T_2\left(\frac{3}{2}\right) \right| &= \left| \frac{2}{3} - \left(2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{8 - 6 - 3}{12} \right| = \frac{1}{12} \\ &= \left| R_3\left(\frac{3}{2}\right) \right| = \left| \frac{f'''(\xi_{\frac{3}{2}})}{3!} \frac{1}{2^3} \right| \leq 1 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

kde $\xi_{\frac{3}{2}} \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$, tj. v odhadu uplatníme $|f'''(1)| = 6 \geq |f'''(\xi_{\frac{3}{2}})|$.

BLOK 2 (25 BODŮ)

Příklad 3 (8 b.) Jsou dány body $[-1, 2]$, $[0, 1]$, $[2, 5]$, $[3, -14]$. Proložte jimi Newtonův polynom. *Poznámka:* Polynom má celočíselné koeficienty.

Řešení: Polynom $p(x) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)x + a_3(x + 1)x(x - 2)$.

Dosazením zadaných souřadnic odvodíme soustavu rovnic pro neznámé $(a_0, a_1, a_2, a_3)^T$

s rozšířenou maticí
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 12 & 12 & -14 \end{array} \right)$$

a s řešením $a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -2$.

Newtonův polynom (stačí jedna varianta)

$$p(x) = 2 - (x + 1) + (x + 1)x - 2(x + 1)x(x - 2) = -2x^3 + 3x^2 + 4x + 1.$$

Příklad 4 (8 b.) Rovnicí $2x - 3y - 2z + 8 = 0$ je dána rovina σ . Rovina ϱ je dána body $A = [1, 1, -1]$, $B = [2, -1, 2]$ a $C = [2, 2, 2]$.

a) (2 b.) Napište obecnou rovnici roviny ϱ .

b) (3 b.) Průnikem rovin σ a ϱ je přímka, označme ji p . Odvoďte její vektorovou rovnici.

c) (1 b.) Určete souřadnice bodu Q , jenž je průnikem přímky p a roviny určené osami x a y , tj. roviny dané rovnicí $z = 0$.

d) (2 b.) Určete vzájemnou polohu souřadné osy y a přímky p . Pokud mají společný bod, uveďte jeho souřadnice.

Řešení: a) Definujme $\vec{v}_{AB} = B - A = (1, -2, 3)$ a $\vec{v}_{AC} = C - A = (1, 1, 3)$. Pak $\vec{n} = \vec{v}_{AB} \times \vec{v}_{AC} = (-9, 0, 3)$ a $\varrho: 3x - z + d = 0$.

Z $C \in \varrho$ plyne $\varrho: 3x - z - 4 = 0$ (zkouška: $A, B, C \in \varrho$).

b) Řešme soustavu dvou rovnic $2x - 3y - 2z + 8 = 0$ a $3x - z - 4 = 0$.

Volba $x = t$ dává $z = -4 + 3t$ a $3y = 2t - 2(-4 + 3t) + 8 = 16 - 4t \Rightarrow y = 16/3 - 4t/3$.

Zavedme $t = 1 + 3s$, odtud

přímka $p: X = P + s\vec{v}$, kde $P = [1, 4, -1]$, $\vec{v} = (3, -4, 9)$ a $s \in \mathbb{R}$.

c) Pro společný bod platí $-1 + 9s = 0$, tedy $s = 1/9$. Odtud $Q = [4/3, 32/9, 0]$.

d) Normálový vektor roviny ϱ je $(3, 0, -1)$ a směrový vektor osy y je $(0, 1, 0)$, vektory jsou na sebe kolmé, tudíž osa y buď leží v rovině ϱ , nebo je s ní rovnoběžná. První případ nenastává, protože bod $[0, 0, 0]$ leží na ose y , nikoli však v rovině ϱ (ani na přímce p). Osa y neprotíná rovinu ϱ , v níž leží přímka p . Osa y a přímka p jsou mimoběžné.

Nebo jinak – výpočtem. Vektorová rovnice osy y : $X = r(0, 1, 0)$, kde $r \in \mathbb{R}$. Hledáme společný bod osy y a přímky p . Hledáme tedy r, s , aby platilo $1 + 3s = 0$, $4 - 4s = r$ a $-1 + 9s = 0$. První a třetí rovnice ukazují, že tato soustava nemá řešení, průsečík tedy neexistuje. Osa y a přímka p jsou mimoběžné.

Příklad 5 (9 b.) a) (5 b.) Určete vlastní čísla a vlastní vektory délky $\sqrt{10}$ matice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & -\frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{19}{4} \end{pmatrix}.$$

b) (2 b.) Označme $B \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1}A^{-1}$. Určete vlastní čísla a vlastní vektory délky $\sqrt{10}$ matice B .

c) (2 b.) Označme $C \stackrel{\text{def}}{=} 4B + I$, kde I je matice identity. Určete vlastní čísla a vlastní vektory délky $\sqrt{10}$ matice C . *Rady: Nelekejte se, že prvky matice A jsou zlomky. V úkolech a) a b) jste získali zkušenosti s vlastními vektory. Začněte úvahami o tom, co by mohly být vlastní vektory matice C .*

Řešení: a) $|A - \lambda I| = \left(-\frac{11}{4} - \lambda\right) \left(\frac{19}{4} - \lambda\right) + \frac{81}{16}.$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 - \frac{8}{4}\lambda + \frac{-209 + 81}{16} = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$ má řešení $\lambda_1 = -2$ a $\lambda_2 = 4$.

V. v. u_1 příslušný $\lambda_1 = -2$: $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} + \frac{8}{4} & -\frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{19}{4} + \frac{8}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{27}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix};$

v. v. u_2 příslušný $\lambda_2 = 4$: $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} - \frac{16}{4} & -\frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{19}{4} - \frac{16}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{27}{4} & -\frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

b) Vl. čísla μ a vl. vek. matice B : $\mu_1 = \lambda_1^{-2} = \frac{1}{4}$, u_1 ; $\mu_2 = \lambda_2^{-2} = \frac{1}{16}$, u_2 .

c) $Cu_1 = (4\mu_1 + 1)u_1 = 2u_1$, $Cu_2 = (4\mu_2 + 1)u_2 = \frac{5}{4}u_2$.

Vlastní čísla 2 a $\frac{5}{4}$, vlastní vektory u_1 a u_2 .