1 Diferenciální počet

1.1 Limity funkcí

V následujících příkladech vypočítejte limity (pokud existují).

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(x+1)}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$
3. $\lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{\ln(x-\pi)}{\operatorname{cotg} x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln \frac{1}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \sin^2 x$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \arccos \frac{x+2}{\sqrt{2}x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3}{x^2-1}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin x - \cos x + 1}{x^2}$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x^2+1)\sin x}{x^3+2}$
11. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x+1) \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{x}$
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1+\sin x}{1+x}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/x}$
14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2 e^{2x}}$

Výsledky: **1**. 1, **2**. -2, **3**. 0, **4**. 1/2, **5**. 0, **6**. 0, **7**. $\pi/4$, **8**. neex., **9**. 3/2, **10**. 0, **11**. $+\infty$, **12**. 0, **13**. e, **14**. -1.

1.2 Geometrický význam derivace

V následujících příkladech najděte rovnici tečny křivky k sestrojené v jejím bodě T.

1. $k:\ y = x^2 \ln x;\ T = [1, ?]$
2. $k:\ y = x \operatorname{arctg}(2-x);\ T = [1, ?]$
3. $k:\ y = \sqrt[3]{(x+3)^2};\ T = [5, ?]$
4. $k:\ y = \frac{x+2}{x-1};\ T = [2, ?]$

Výsledky: **1**. $x - y - 1 = 0$, **2**. $(\pi - 2)x - 4y + 2 = 0$, **3**. $x - 3y + 7 = 0$, **4**. $3x + y - 10 = 0$.

V následujících příkladech najděte rovnici tečny křivky k rovnoběžnou s přímkou p.

5. $k:\ y = x \ln x;\ p: 4x - y - 1 = 0$
6. $k:\ y = \frac{x-5}{x-2};\ p: 3x - y + 1 = 0$
7. $k:\ y = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1}\ p: x + y - 2 = 0$
8. $k:\ y = \frac{x^3}{x^2+1};\ p: x - y + 1 = 0$

Výsledky: **5**. $y = 4x - e^3$, **6**. $y = 3x - 11,\ y = 3x + 1$, **7**. $x + y = 0$, **8**. $2x - 2y - 1 = 0,\ 2x - 2y + 1 = 0$.

V následujících příkladech najděte rovnici normály křivky k kolmé k přímce p.

9. $k:\ y^3 = 2 - x;\ p: 3x + y + 1 = 0$
10. $k:\ y = x - \operatorname{arctg} x;\ p: -x + 2y = 0$

11. $k: \ y = (x^2+1)\mathrm{e}^{x+1}; \ p: 4y-1=0$ 12. $k: \ y = \operatorname{arctg} \frac{1}{2x-1}; \ p: x-y=0$

Výsledky: **9**. $x-3y+2=0, x-3y-6=0$, **10**. $8x+4y\pm(12-\pi)=0$, **11**. $x=-1$, **12**. $4x+4y+\pi=0, 4x+4y-\pi+4=0$.

V následujících příkladech určete velikosti úhlů, pod nimiž se protínají dané křivky.

13. $y=\sin x, \ y=\cos x$ 14. $xy=\sqrt{5}, \ x^2-y^2=4$

15. $y=\mathrm{e}^x, \ y=2\mathrm{e}^{-x}+1$ 16. $y=\operatorname{arctg} x, \ y=\operatorname{arccotg} x$

Výsledky: **13**. $\varphi = \operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$, **14**. $\varphi=\pi/2$, **15**. $\varphi=\operatorname{arctg} 3$, **16**. $\varphi=\operatorname{arctg}(4/3)$.

1.3 Fyzikální význam derivace

1. Hmotný bod se pohybuje po přímce. Závislost jeho dráhy (v metrech) na čase (v sekundách) je popsaná funkcí $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 12t$. Určete jeho okamžitou rychlost a zrychlení v čase $t = 1\,\mathrm{s}$ a $t = 2\,\mathrm{s}$.

Výsledek: $12\,m/s$, $6\,m/s^2$, $24\,m/s$, $18\,m/s^2$,

2. Hmotný bod se pohybuje po přímce. Závislost jeho dráhy (v metrech) na čase (v sekundách) je popsaná funkcí $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$. Určete:

a) jeho okamžitou rychlost a zrychlení v čase $t = 1\,\mathrm{s}$ a $t = 5\,\mathrm{s}$,

b) časy, kdy bod mění orientaci pohybu a čas, kdy mění orientaci zrychlení.

Výsledek: a)$9\,m/s$, $-12\,m/s^2$, $9\,m/s$, $12\,m/s^2$, b) $2\,s$, $4\,s$, $3\,s$

3. Mladý muž (vysoký 1.8 m) s dívkou (vysokou 1.7 m) vedle sebe, se pohybují rychlostí 1 m/s po přímce. V Čase $t = 0$ se nacházejí přímo pod lampou, která visí 6 m nad zemí. Určete jakou dráhu urazí muž a stín temene hlavy muže za 10 s a o kolik je rychlost stínu hlavy muže větší než rychlost hlavy dívky.

Výsledek: $10\,m$, $14.28\,m$, $0.033\,m/s$

4. Do válcové nádoby s poloměrem podstavy $r = 0.3\,m$ přitéká od času $t = 0$ rovnoměrně voda rychlostí 10 litrů za minutu. Určete rychlost jakou se mění výška hladiny vody.

Výsledek: Přibližně 3.5 cm/min

5. Nádoba tvaru kužele má poloměr podstavy 30 cm a výšku 100 cm je postavena vrcholem dolu. Do nádoby přitéká od času $t = 0$ rovnoměrně voda rychlostí 3 litry za minutu. Určete rychlost jakou se mění výška hladiny vody v závislosti na čase. Určete jakou okamžitou rychlostí roste hladina v časech 1 min, 8 min a 27 min.

Výsledek: Přibližně $4.9/\sqrt[3]{t^2}$ cm/min, $4.9\,$cm/min, $1.23\,$cm/min, $0.5\,$cm/min

6. Žebřík délky l je opřený o svislou stěnu. V čase $t = 0$ začneme dolní konec žebříku odtahovat od zdi konstantní rychlostí v m/s. Horí konec se bude stále opírat o zeď. Zanedbejme tření horního konce žebříku o zeď a všechny další faktory, které pohyb žebříku brzdí. Určete okamžitou rychlost (v závislosti na čase) horního konce žebříku, kterou se horní konec pohybuje. Určete teoretikou rychlost, kterou horní konec dopadne na zem.

Výsledek: $(v^2t)/\sqrt{(l^2 - v^2t^2)}$, teoreticky $+\infty$

1.4 Monotonnie a lokální extrémy

V následujících příkladech najděte maximální intervaly, na nichž jsou funkce ryze monotonní a lokální extrémy funkcí.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$
2. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 4$
3. $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$
4. $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$
5. $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-2x}$
6. $f(x) = x^3 \ln x^2$
7. $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos^2 x,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$
8. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1}$
9. $f(x) = x - 3\sqrt[3]{(x-1)^2}$,
10. $f(x) = 3x - 6 \operatorname{arctg} x$

Výsledky:

1. $(-\infty, -1\rangle, \langle 3, +\infty)$ rostoucí, $\langle -1, 3\rangle$ klesající, lok. max. $f(-1) = 8$, lok. min. $f(3) = -24$.
2. $\langle -4, 0\rangle, \langle 1, +\infty)$ rostoucí, $(-\infty, -4\rangle, \langle 0, 1\rangle$ klesající, lok. max. $f(0) = 4$, lok. min. $f(-4) = -124$, $f(1) = 1$.
3. $\langle -3, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, 3\rangle$ rostoucí, $(-\infty, -3\rangle, \langle 3, +\infty)$ klesající, lok. max. $f(-3) = 9/2$, lok. min. $f(3) = -9/2$.
4. $\langle 0, 2\rangle$ rostoucí, $\langle 2, 4\rangle$ klesající, lok. max. $f(2) = 2$, lok. min. $f(0) = f(4) = 0$.
5. $\langle 0, 1\rangle$ rostoucí, $(-\infty, 0\rangle, \langle 1, +\infty)$ klesající, lok. max. $f(1) = \mathrm{e}^{-2}$, lok. min. $f(0) = 0$.
6. $(-\infty, -\mathrm{e}^{-1/3}\rangle, \langle \mathrm{e}^{-1/3}, +\infty)$ rostoucí, $\langle -\mathrm{e}^{-1/3}, 0), (0, \mathrm{e}^{-1/3}\rangle$ klesající, lok. max. $f(-\mathrm{e}^{-1/3}) = 2/(3\mathrm{e})$, lok. min. $f(\mathrm{e}^{-1/3}) = -2/(3\mathrm{e})$.
7. $\langle 0, \pi/3\rangle, \langle \pi/2, 2\pi/3\rangle, \langle 3\pi/2, 2\pi\rangle$ rostoucí, $\langle \pi/3, \pi/2\rangle, \langle 2\pi/3, 3\pi/2\rangle$ klesající, lok. max. $f(\pi/3) = f(2\pi/3) = 7/4, f(2\pi) = 1$, lok. min. $f(0) = 1, f(\pi/2) = \sqrt{3}, f(3\pi/2) = -\sqrt{3}$.
8. $(-\infty, 1), (1, +\infty)$ klesající, lok. ext. neex.
9. $(-\infty, 1\rangle, \langle 9, +\infty)$ rostoucí, $\langle 1, 9\rangle$ klesající, lok. max. $f(1) = 1$, lok. min $f(9) = -3$.

10. $(-\infty,-1\rangle, \langle 1,+\infty)$ rostoucí, $\langle -1,1\rangle$ klesající, lok. max. $f(-1)=3(\pi/2-1)$, lok. min. $f(1)=3(1-\pi/2)$.

1.5 Konvexnost, konkávnost, inflexní body

V následujících příkladech najděte maximální intervaly, na nichž jsou funkce ryze konvexní a ryze konkávní. Najděte inflexní body funkcí.

1. $f(x)=x^4-8x^3+18x^2+36x+12$
2. $f(x)=3x^5-25x^4+60x^3+5x$
3. $f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}$
4. $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$
5. $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$
6. $f(x)=x^2\ln x^3$
7. $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\sin^2 x,\ \ x\in\langle 0,2\pi\rangle$
8. $f(x)=\arcsin\frac{1}{x}$

Výsledky:

1. $(-\infty,1\rangle, \langle 3,+\infty)$ konvex., $\langle 1,3\rangle$ konk., $1,3$.
2. $\langle 0,2\rangle, \langle 3,+\infty)$ konvex., $(-\infty,0\rangle, \langle 2,3\rangle$ konk., $0,2,3$.
3. $\langle -\infty,-\sqrt{3}), \langle 0,\sqrt{3})$ konvex., $(-\sqrt{3},0\rangle, (\sqrt{3},+\infty)$ konk., 0.
4. $\langle -1/2,1), (1,+\infty)$ konvex., $(-\infty,-1/2\rangle$ konk., $-1/2$.
5. $(-\infty,2-\sqrt{2}\rangle, \langle 2+\sqrt{2},+\infty)$ konvex., $\langle 2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\rangle$ konk., $2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}$.
6. $(0,\mathrm{e}^{-3/2}\rangle$, konk., $\langle \mathrm{e}^{-3/2},+\infty)$ konvex., $\mathrm{e}^{-3/2}$.
7. $\langle 0,2\pi/3\rangle, \langle 4\pi/3,2\pi\rangle$ konk., $\langle 2\pi/3,4\pi/3\rangle$ konvex., $2\pi/3,4\pi/3$.
8. $(-\infty,-1\rangle$ konk., $\langle 1,+\infty)$ konvex., inf. body neex.

1.6 Asymptoty

V následujících příkladech najděte asymptoty grafů funkcí (pokud existují).

1. $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$
2. $f(x)=\frac{x^3-x^2+1}{x^2-4}$
3. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$
4. $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1}$
5. $f(x)=\frac{\arcsin x}{x^2-1}$
6. $f(x)=\arcsin\frac{2x-1}{x+1}$
7. $f(x)=3x-2\,\mathrm{arctg}\,x$
8. $f(x)=(x+1)\,\mathrm{arccotg}\,x$
9. $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+2}$
10. $f(x)=3x+\frac{\cos x}{x}$

Výsledky: **1**. $x=-1, y=x$, **2**. $x=-2, x=2, y=x-1$, **3**. $x=0, y=0$, **4**. $x=-1, x=1, y=0$, **5**. $x=-1, x=1$, **6**. neex., **7**. $y=3x+\pi, y=3x-\pi$, **8**. $y=\pi x+\pi+1, y=1$, **9**. $x=-2, x=1, y=0$ **10**. $x=0, y=3x$.

1.7 Globální extrémy

V následujících příkladech najděte globální extrémy funkcí na daných intervalech (pokud existují).

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1},\ Df$
2. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2},\ \langle -1, 2\rangle$
3. $f(x) = x - \sin 2x,\ \langle 0, \pi\rangle$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2-1),\ \langle -1, 1\rangle$
5. $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x-1}{x+1},\ (-1, 1\rangle$
6. $f(x) = \arcsin \frac{x+1}{x-1},\ Df$
7. $f(x) = 2x + \frac{8}{x+3},\ \langle -2, 0\rangle$
8. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3,\ \langle -2, 3\rangle$

Výsledky: **1**. Max. neex., min.$f(0) = -1$, **2**. Max. $f(-1) = \sqrt[3]{4}$, min. $f(1) = 0$, **3**. Max. $f(5\pi/6) = 5\pi/6 + \sqrt{3}/2$, min. $f(\pi/6) = \pi/6 - \sqrt{3}/2$, **4**. Max. $f(-1) = f(1) = 0$, min. $f(1-\sqrt{2}) = 2\mathrm{e}^{\sqrt{2}-1}(1-\sqrt{2})$, **5**. Max. neex., min. $f(1) = \pi/2$, **6**. Max. neex., min. $f(0) = -\pi/2$, **7**. Max. $f(-2) = 4$, min. $f(-1) = 2$, **8**. Max. $f(-1) = 10$, min. $f(2) = -17$.

1.7.1 Slovní úlohy na globální extrémy

1. Číslo 18 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

Výsledek: 9+9

2. Určete rozměry krabice s čtvercovým dnem bez víka s objemem 4 litry tak, aby její povrch byl minimální.

Výsledek: 20 cm x 20 cm x 10 cm

3. Ze všech nahoře otevřených válcových nádob s daným objemem V určete tu, která má nejmenší povrch.

Výsledek: Pol.pod. $r = \sqrt[3]{V/\pi}$, výška $v = \sqrt[3]{V/\pi}$

4. Na křivce $y = \sqrt{2x+4} - 3$ najděte bod, který je nejblíže bodu $[7, -3]$.

Výsledek: $[6, 1]$

5. Na křivce $x = \sqrt{3y+6} - 3$ najděte bod, který je nejblíže bodu $[-3, 1]$.

Výsledek: $[3(\sqrt{2}/2 - 1), -1/2]$

6. Ze všech rotačních kuželů vepsaných kouli o poloměru R vyberte ten, který má největší objem.

Výsledek: Poloměr podstavy $r = (2\sqrt{2}/3)R$, výška $v = 4R/3$

7. Ze všech obdélníků vepsaných do půlkruhu o poloměru r najděte ten, který má největší obsah.

Výsledek: Strany $\sqrt{2}r$, $r/\sqrt{2}$

8. Uzavřený sud o obsahu 200 litrů je vyroben z plechu, jehož cena pro plášť je 200 Kč za metr čtvereční a 300 Kč za metr čtvereční pro dno a víko. Určete rozměry sudu, aby pořizovací cena byla nejmenší.

Výsledek: Poloměr podstavy $r \doteq 27.7\,\mathrm{cm}$, výška $v \doteq 83\,\mathrm{cm}$

9. Ze všech obdélníků vepsaných do elipsy o poloosách a, b vyberte ten, který má největší obsah.

Výsledek: Strany $a\sqrt{2}, b\sqrt{2}$

10. Do rovnoramenného lichoběžníka o základnách z_1, z_2 a výšce v je vepsán obdélník (jedna strana leží na z_1) tak, aby jeho obsah byl maximální a to pro:

a) $z_1 = 10\,\mathrm{cm}$, $z_2 = 4\,\mathrm{cm}$, $v = 6\,\mathrm{cm}$
b) $z_1 = 10\,\mathrm{cm}$, $z_2 = 8\,\mathrm{cm}$, $v = 6\,\mathrm{cm}$

Výsledek: Obdélník o stranách: a) 5 cm, 5 cm, b) 8 cm, 6 cm

11. Ze všech oken , které má obvod o a má tvaru sjednocení obdélníka a půlkruhu sestrojeného nad jednou jeho stranou, vyberte to, které má největší obsah.

Výsledek: Obdélník má rozměry $2o/(4+\pi), o/(4+\pi)$

12. Ve válcové nádoba stojící na vodorovné podložce je hladina vody ve výšce h. Určete v jaké výšce se má nádoba navrtat, aby voda vystříkla co nejdále na podložku. (Návod: Využijte zákon o zachování energie.)

Výsledek: Ve výšce $h/2$

2 Lineární algerbra

2.1 Matice

Určete hodnost následujících matic.

1. $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 5 & -5 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

Výsledky: **1**. $h = 3$, **2**. $h = 2$., **3**. $h = 3$, **4**. $h = 2$, **5**. $h = 3$, **6**. $h = 2$,

Určete hodnost následujících matic v závislosti na parametru λ.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 3\lambda \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -2 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -3 & -4 & \lambda \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -4 & 2\lambda + 3 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} \lambda & -\lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda - 1 & \lambda \\ -2 & 2 - \lambda & 0 \end{pmatrix}$

Výsledky: **7**. $\lambda = -7 \Rightarrow h = 2$, $\lambda \neq -7 \Rightarrow h = 3$, **8**. $\lambda = -3 \Rightarrow h = 2$, $\lambda \neq -3 \Rightarrow h = 3$, **9**. $(\lambda = -1 \vee \lambda = -6) \Rightarrow h = 2$, $(\lambda \neq -1 \wedge \lambda \neq -6) \Rightarrow h = 3$, **10**. $(\lambda = 1 \vee \lambda = 2) \Rightarrow h = 2$, $(\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq 2) \Rightarrow h = 3$, **11**. $\lambda = 1 \Rightarrow h = 1$, $\lambda = -1 \Rightarrow h = 2$, $(\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -1) \Rightarrow h = 3$, **12**. $\lambda = 0 \Rightarrow h = 1$, $\lambda = 1 \Rightarrow h = 2$, $(\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 1) \Rightarrow h = 3$.

2.2 Determinaty

Vypočítejte následující determinanty.

1. $\begin{vmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & -7 & 0 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 8 & -3 \end{vmatrix}$

Výsledky: **1**. 40, **2**. -34., **3**. -68, **4**. 10, **5**. 0, **6**. -34.

Určete pro jakou hodnotu parametru λ se následující determinanty rovnají 0.

7. $\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -3 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 3 & \lambda & 2 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -3 \\ 6 & 9-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix}$

Výsledky: **7**. $\lambda = -2$, **8**. $\lambda = \pm 2$., **9**. $\lambda = 2$, **10**. $\lambda = -2, \lambda = 3$, **11**. $\lambda = \pm 1$, **12**. $\lambda = 0, \lambda = 9, \lambda = 14$.

2.3 Soustavy lineárních algebraických rovnic

Řešte následující soustavy rovnic.

1. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 &= -2 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 6 \\ -x_1 - 2x_2 &= -2 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 1 \\ 6x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$

7. $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 15 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3 \end{array}$

8. $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 9x_1 & - & 16x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & = & 9 \end{array}$

Výsledky: **1**. $(1,-1)$, **2**. Řeš. neex., **3**. $(0,-1)+t(1,3)$, **4**. $(1,2)$, **5**. $(-1,1,2)$, **6**. Řeš. neex. **7**. $(1,0,2,0)$, **8**. $(-31,-18,0,0)+\alpha(19,11,1,0)+\beta(-7,-4,0,1)$,

Najděte řešení následujících soustav rovnic v závislosti na parametru λ.

9. $\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & \lambda \\ 6x_1 & + & (\lambda+4)x_2 & = & 3\lambda+1 \end{array}$

10. $\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & \lambda x_2 & = & \lambda \\ 2x_1 & + & (\lambda^2-8)x_2 & = & \lambda-2 \end{array}$

11. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 1 \end{array}$

12. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 5x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & -3 \\ -x_1 & + & \lambda x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \end{array}$

13. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & \lambda x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & \lambda x_3 & = & 5 \\ \lambda x_1 & + & (1-\lambda)x_2 & + & 2\lambda^2 x_3 & = & 3 \end{array}$

14. $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -5 \\ & & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & + & \lambda x_2 & - & 4x_3 & + & 12x_4 & = & -7 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}$

Výsledky:

9. $\lambda=-1 \Rightarrow$ řeš. neex., $\lambda\neq-1 \Rightarrow \left(\frac{\lambda^2+\lambda-1}{2(\lambda+1)}, \frac{1}{\lambda+1}\right)$,

10. $\lambda=4 \Rightarrow$ řeš. neex., $\lambda=-2 \Rightarrow (-2,0)+\alpha(2,1)$, $(\lambda\neq4\wedge\lambda\neq-2) \Rightarrow \left(\frac{1}{4-\lambda}, \frac{3\lambda-\lambda^2}{4-\lambda}\right)$,

11. $\lambda=-2 \Rightarrow$ řeš. neex., $\lambda\neq-2 \Rightarrow \left(\frac{-\lambda}{\lambda+2}, \frac{2\lambda+2}{\lambda+2}, \frac{-2}{\lambda+2}\right)$,

12. $\lambda=17 \Rightarrow$ řeš. neex., $\lambda=2 \Rightarrow (1,3,-2)+\alpha(1,-4,3)$, $(\lambda\neq17\wedge\lambda\neq2) \Rightarrow \left(\frac{26}{17-\lambda}, \frac{1}{17-\lambda}, \frac{3}{17-\lambda}\right)$

13. $\lambda=2 \Rightarrow$ řeš. neex. , $\lambda=0 \Rightarrow (1,3,0)+\alpha(0,0,1)$, $(\lambda\neq2\wedge\lambda\neq0) \Rightarrow \left(\frac{5\lambda+2}{2-\lambda}, \frac{\lambda+6}{2-\lambda}, \frac{2}{\lambda-2}\right)$,

14. $\lambda=-4 \Rightarrow \left(\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, 0, -2\right)+\alpha(-4,1,3,3)$, $\lambda\neq-4 \Rightarrow (-3,0,4,2)$.

Najděte všechna řešení následujících homogenních soustav lineárních rovnic.

15. $\begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = 0 \\ 5x_1 & & & + & 3x_3 & = 0 \end{array}$

16. $\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = 0 \end{array}$

17. $\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 5x_3 & & & = & 0 \end{array}$

18. $\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \end{array}$

Výsledky: **15**. $L\langle(-3,7,5)\rangle$, **16**. $L\langle\mathbf{o}\rangle$., **17**. $L\langle(0,-2,0,1),(-5,8,1,0)\rangle$, **18**. $L\langle(1,2,2,-3)\rangle$.

Řešte následující soustavy rovnic užitím Cramerova pravidla.

19. $\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & 3 \end{array}$

20. $\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ -x_1 & + & x_2 & = & -1 \end{array}$

21. $\begin{array}{rcrcr} \sin x \cdot g_1(x) & + & \cos x \cdot g_2(x) & = & \operatorname{cotg} x \\ \cos x \cdot g_1(x) & - & \sin x \cdot g_2(x) & = & \operatorname{tg} x \end{array}$

22. $\begin{array}{rcrcr} \mathrm{e}^x \cdot g_1(x) & + & \mathrm{e}^{-x} \cdot g_2(x) & = & 0 \\ \mathrm{e}^x \cdot g_1(x) & - & \mathrm{e}^{-x} \cdot g_2(x) & = & \frac{\mathrm{e}^x}{1+x} \end{array}$

23. $\begin{array}{rcrcrl} 5x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = -4 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = 22 \\ -3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = -10 \end{array}$

24. $\begin{array}{rcrcrl} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = 3 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = 5 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = 1 \end{array}$

Výsledky: **19**. $(1,-1)$, **20**. $(2,1)$, **21**. $(\cos x + \sin x, \cos x \operatorname{cotg} x - \sin x \operatorname{tg} x)$, **22**. $(\frac{1}{2(x+1)}, -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2(x+1)})$, **23**. $(1,3,5)$, **24**. $(1,1,1)$.

2.4 Vektorové prostory $\boldsymbol{R}^{\mathrm{n}}$

Rozhodněte, zda vektor $\mathbf{v}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Pokud ano, najděte tuto lineární kombinaci.

1. $\mathbf{u}_1 = (1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,1)$, $\mathbf{v} = (1,5)$.
2. $\mathbf{u}_1 = (3,2)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,3)$, $\mathbf{v} = (-9,5)$.
3. $\mathbf{u}_1 = (4,-2)$, $\mathbf{u}_2 = (-2,1)$, $\mathbf{v} = (1,2)$.

4. $\mathbf{u}_1 = (-1,3,2),\ \mathbf{u}_2 = (3,2,1),\ \mathbf{u}_3 = (1,-1,2)\ \mathbf{v} = (-4,3,5)$.
5. $\mathbf{u}_1 = (2,4,2),\ \mathbf{u}_2 = (-1,2,3),\ \mathbf{u}_3 = (4,-1,-5)\ \mathbf{v} = (-2,-5,-3)$.
6. $\mathbf{u}_1 = (-1,3,1),\ \mathbf{u}_2 = (4,1,-2),\ \mathbf{u}_3 = (2,0,3)\ \mathbf{v} = (-3,8,11)$.
7. $\mathbf{u}_1 = (2,1,-1),\ \mathbf{u}_2 = (-2,2,4),\ \mathbf{u}_3 = (3,1,-2)\ \mathbf{v} = (7,0,1)$.
8. $\mathbf{u}_1 = (2,3,-1),\ \mathbf{u}_2 = (-1,1,3),\ \mathbf{u}_3 = (3,2,-4)\ \mathbf{v} = (8,7,-9)$.

Výsledky: **1**. $2\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$, **2**. $-2\mathbf{u}_1+3\mathbf{u}_2$, **3**. Není lin. kom. **4**. $2\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$, **5**. Např. $-2\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$. **6**. $3\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2+2\mathbf{u}_3$, **7**. Není lin. kom. **8**. Např. $2\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$.

Rozhodněte pro jakou hodnotu parametru λ je vektor $\mathbf{v}$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.
9. $\mathbf{u}_1 = (2,1),\ \mathbf{u}_2 = (-1,3),\ \mathbf{v} = (3+\lambda,-2)$.
10. $\mathbf{u}_1 = (3,2),\ \mathbf{u}_2 = (6,4),\ \mathbf{v} = (2\lambda,\lambda)$.
11. $\mathbf{u}_1 = (-2,-1),\ \mathbf{u}_2 = (4,2),\ \mathbf{v} = (\lambda,3)$.
12. $\mathbf{u}_1 = (-1,3),\ \mathbf{u}_2 = (2,\lambda),\ \mathbf{v} = (1,1)$.
13. $\mathbf{u}_1 = (1,-1,3),\ \mathbf{u}_2 = (2,1,1),\ \mathbf{u}_3 = (-1,2,3),\ \mathbf{v} = (2,\lambda,1)$.
14. $\mathbf{u}_1 = (-1,2,1),\ \mathbf{u}_2 = (2,3,5),\ \mathbf{u}_3 = (-1,-2,-\lambda)\ \mathbf{v} = (-5,-5,5)$.

Výsledky: **9**. Pro každé λ, **10**. $\lambda = 0$, **11**. $\lambda = 6$, **12**. $\lambda \neq -6$, **13**. Pro každé λ, **14**. $\lambda \neq 3$,

Rozhodněte zda dané skupiny vektorů jsou lineárně závislé nebo lineárně nezávislé.
15. $\langle(-1,2,4),(1,3,2),(1,1,1)\rangle$.
16. $\langle(2,-3,1),(-1,4,3),(2,1,1),(0,1,1)\rangle$.
17. $\langle(-3,2,1),(2,-1,-2),(5,-3,-3)\rangle$.
18. $\langle(1,3,2),(-2,1,1),(3,1,0)\rangle$.
19. $\langle(-1,1,2,1),(2,3,1,-1),(3,2,-1,-1)\rangle$.
20. $\langle(2,-1,3,1),(-1,2,-1,2),(3,-1,2,-2),(1,2,1,-3)\rangle$.

Výsledky: **15**. Lin. nez. **16**. Lin. záv. **17**. Lin. záv. **18**. Lin. nez. **19**. Lin. nez. **20**. Lin. nez.

Rozhodněte zda dané skupiny vektorů jsou bází prostoru $R^{\mathbf{n}}$.
21. $\langle(2,3,2),(-1,2,4\rangle$.
22. $\langle(1,2,-1),(3,1,2),(-1,2,0)\rangle$.
23. $\langle(-2,1,1),(3,-1,-2),(2,-3,-3),(2,-1,4)\rangle$.
24. $\langle(1,1,2),(-2,0,2),(-3,-1,0)\rangle$.
25. $\langle(-2,1,1,1),(2,1,2,-1),(3,2,-1,-2)\rangle$.
26. $\langle(-1,2,3,1),(2,-4,1,0),(1,0,2,1),(3,1,0,2)\rangle$.

Výsledky: **21**. Ne. **22**. Ano. **23**. Ne. **24**. Ne. **25**. Ne. **26**. Ano.

Rozhodněte zda vektor $\mathbf{v}$ patří do lineárního obalu vektorů $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$. Pokud ano, vyjádřete vektor $\mathbf{v}$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1 \ldots, \mathbf{u}_n$.

27. $\mathbf{u}_1 = (-2,1,3),\ \mathbf{u}_2 = (3,1,2),\ \mathbf{v} = (-7,1,4)$.
28. $\mathbf{u}_1 = (-1,2,1),\ \mathbf{u}_2 = (2,-1,2),\ \mathbf{u}_3 = (-1,5,5)\ \mathbf{v} = (1,2,-3)$.
29. $\mathbf{u}_1 = (1,-1,2),\ \mathbf{u}_2 = (1,2,2),\ \mathbf{u}_3 = (1,1,-1), \mathbf{u}_4 = (-2,1,1)$
    $\mathbf{v} = (3,-1,3)$.
30. $\mathbf{u}_1 = (2,-1,1),\ \mathbf{u}_2 = (-1,3,2),\ \mathbf{u}_3 = (3,2,5)\ \mathbf{v} = (-1,2,1)$.

Výsledky: **27**. Ano, $2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, **28**. Ne, **29**. Ano, např. $2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$, **30**. Ano, např. $2\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$.

2.5 Operace s maticemi

Řešte dané maticové rovnice pro neznámou matici $\mathbf{X}$.

1. $2\mathbf{A} + \mathbf{X} = 3\mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $3\mathbf{A} - 2\mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$
3. $2\mathbf{A}^T + 3\mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 4 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$
4. $3\mathbf{A} - 2\mathbf{X} = 2\mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Výsledky: **1**. $\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **2**. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **3**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **4**. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

V následujících příkladech vypočtěte součiny matic.

5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledky: **5**. $\begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **6**. $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ **7**. $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ **8**. $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & -13 & 9 \end{pmatrix}$

Pokud existují najděte inverzní matice k následujícím maticím.

9. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledky: **9**. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **10**. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **11**. $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ **12**. Neexistuje. **13**. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ 6 & 8 & -5 \\ 7 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ **14**. $\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -4 & 5 & -7 \\ 14 & -5 & 12 \\ -9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

V následujících příkladech řešte maticové rovnice.

15. $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{AX} + \mathbf{BX} = \mathbf{C}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

18. $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 6 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

19. $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

20. $\mathbf{XA} - 2\mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$,

21. $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -7 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$,

Výsledky: **15**. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, **16**. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, **17**. $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & -15 \\ -8 & 24 \end{pmatrix}$,
18. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **19**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, **20**. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
21. $\begin{pmatrix} 2\alpha-7 & 2\beta-1 & 2\gamma \\ -\alpha+5 & -\beta+4 & -\gamma+2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

3 Analytická geometrie

3.1 Skalární a vektorový součin

1. Určtete odchylku vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, kde
   a) $\mathbf{u} = (-1, 2, \sqrt{3}), \mathbf{v} = (2, 1, -2)$.
   b) $\mathbf{u} = \leftrightarrow AB, \mathbf{v} = \leftrightarrow AC$, kde $A = [2, 1, -1], B = [1, 2, 1], C = [3, 1, 2]$.
2. Vypočítejte vzdálenost bodu $A = [4, 5, 1]$ od roviny $x + 2y - z - 1 = 0$.

3. Vypočítejte vektorový součin vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, kde

   a) $\mathbf{u} = (2, -1, 3), \mathbf{v} = (3, 1, -1)$.
   b) $\mathbf{u} = (-2, 1, 4), \mathbf{v} = (1, 2, 1)$.
4. Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC a výšku v_c, kde

   a) $A = [2, 3, -1], B = [3, -1, 2], C = [-2, 1, 3]$.
   b) $A = [1, 2, -1], B = [-1, 1, -2], C = [2, 3, 1]$.

5. Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu $ABCDA'B'C'D'$ když $A = [1, -1, 2]$, $B = [3, 0, 1], D = [2, 2, 1], A' = [4, 1, 3]$.

6. Vypočítejte objem trojbokého jehlanu s vrcholy $A = [3, 1, 2], B = [-1, 1, 3]$, $C = [2, 3, 2], D = [-2, 1, 1]$

Výsledky: **1.** a) $\varphi = \arccos(1/\sqrt{6})$, b) $\varphi = \arccos\sqrt{5/12}$, **2**. $v = 2\sqrt{6}$, **3**. a) $(-2, 11, 5)$, b) $(-7, 6, -5)$, **4**. a) $S = \sqrt{170}, v_c = 2\sqrt{85/13}$, b) $S = \sqrt{11}/2, v_c = \sqrt{11/6}$ **5**. $V = 13$, **6**. $V = 3$.

3.2 Vzájemá poloha přímky a roviny

V následujících příkladech vyšetřete vzájemnou polohu roviny ϱ a přímky p. Pokud jsou různoběžné, najděte jejich průsečík a odchylku. Pokud ne, najděte jejich vzdálenost.

1. $\varrho : 2x - y + z - 5 = 0,\ p : x = -1 + 2t, y = 1 - t, z = 2 + t$.

2. $\varrho: x - y + 2z - 9 = 0,\ p = \leftrightarrow AB, A = [-2, 1, 1], B = [1, 1, 2]$.

3. $\varrho = \leftrightarrow ABC, A = [2, -1, 0], B = [1, 0, 2], C = [1, 3, 1], p: x = 2 + t,$
$y = -3 - t, z = 1 - 2t$.

4. $\varrho = \leftrightarrow q_1 q_2,\ q_1:\ x = 1 + 2t, y = -2 + t, z = 1 - t,\ q_2: x = -1 + 3s,$
$y = 2 + s, z = -1 - s,\ p: x = 3 + 2r, y = 1 + 2r, z = 1 - r$.

5. $\varrho \leftrightarrow A\mathbf{n}, A = [1, -2, 3], \mathbf{n} = (1, 2, 1), p: x = -1 + 2t, y = 1 - t, z = 2$.

Výsledky: **1.** Různoběžné, $P = [1, 0, 3], \varphi = \pi/2$, **2**. Různoběžné, $P = [4, 1, 3], \varphi = \arcsin \sqrt{5}/(2\sqrt{3})$, **3**. Rovnoběžné, $v = 1/\sqrt{59}$. **4**. Různoběžné, $P = [-3, -5, 4], \varphi = \arcsin 1/(3\sqrt{2})$ **5**. Rovnoběžné, $v = \sqrt{3/2}$.

V následujících příkladech vyšetřete vzájemnou polohu přímek p a q. Pokud jsou různoběžné, najděte jejich průsečík a odchylku. Pokud nejsou různoběžné, najděte jejich vzdálenost.

6. $p: x = 1 - t, y = 4 + t, z = -1 + 2t,\ q: x = -4 + 3s, y = 7 - s, z = 3s$.
7. $p: x = -1 + t, y = 3 + 2t, z = 1 - t, q = \leftrightarrow AB, A = [1, 3, -3],$
$B = [3, 7, -5]$.
8. $p: x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = -1 + 2t, q = \leftrightarrow AB, A = [-1, 2, 1],$
$B = [3, 1, 2]$.
9. $p \leftrightarrow \varrho\sigma, \varrho: x + y - z + 1 = 0, \sigma: y + z - 1 = 0,\ q: x = 2 + t,$
$y = -1 + 3t, z = 2 - 3t$.
10. $p: x = 2 - t, y = -1 - t, z = 3 + 2t,\ q: x = 1 + s, y = 1 + 2s, z = -1 + s$.

Výsledky: **6**. Různoběžné, $P = [-1, 6, 3], \varphi = \arccos(\sqrt{2}/\sqrt{57})$, **7**. Rovnoběžné, $v = \sqrt{14}$, **8**. Mimoběžné, $v = 2$, **9**. Různoběžné, $P = [2, -1, 2]$, $\varphi = \arccos(4/\sqrt{114})$. **10**. Mimoběžné, $v = \sqrt{15/2}$.

11. Najděte bod souměrně sdružený s bodem $M = [2, 2, 2]$ podle roviny $\varrho: x - 2y + 3z + 10 = 0$.

12. Najděte bod souměrně sdružený s bodem $M = [3, -1, 2]$ podle roviny $\varrho: 2x + y - z - 9 = 0$.

13. Najděte bod souměrně sdružený s bodem $M = [1, -1, 3]$ podle přímky $p: x = 3 + 2t, y = 3 + t, z = 1 - 3t$.

14. Najděte bod souměrně sdružený s bodem $M = [2, 1, -1]$ podle přímky $p: x = 2t, y = -5 + t, z = 5 - 3t$.

Výsledky: **11**. $M' = [0, 6, -4]$, **12**. $M' = [7, 1, 0]$, **13**. $M' = [1, 5, 5]$, **14**. $M' = [6, -7, -1]$,