MA3G: oficiální tahák

Fubiniova věta ve 2D: Nechť g_1 a g_2 jsou dvě (po částech) spojité funkce na intervalu $[a,b]$, přičemž pro každý bod $x \in [a,b]$ jest $g_1(x) \le g_2(x)$. Pomocí funkcí g_1 a g_2 zaveďme množinu

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\}.$$

Nechť je dána funkce $f \in C(M)$. Pro každý bod $x \in [a,b]$ definujme $F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$. Pak lze dvojný integrál $\int_M f\,\mathrm{d}A$ vyjádřit jako integrál dvojnásobný, přesněji

$$\int_M f\,\mathrm{d}A = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Fubiniova věta (2. varianta): Obdoba pro funkce h_1, h_2, kde $\forall y \in [c,d]\ h_1(y) \le h_2(y)$, a množinu $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\right\}$.

Věta o substituci ve dvojném integrálu: Nechť uzávěr $\overline{N}$ oblasti N (tj. oblast N, k níž je přidána její hranice) v souřadné soustavě u, v se zobrazí pomocí rovnic $x = x(u,v)$, $\quad y = y(u,v)$ vzájemně jednoznačně na uzávěr oblasti M (ozn. $\overline{M}$) v souřadné soustavě x, y. Nechť funkce $x(u,v)$ a $y(u,v)$ mají v $\overline{N}$ spojité první parciální derivace a *jakobián* $J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ (též značen $D(u,v)$) je v $\overline{N}$ různý od nuly.

Nechť funkce $f \in C(\overline{M})$, tj. spojitá na $\overline{M}$. Pak $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_N f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.
Porušení předpokladů na množině nulové μ_2-míry nevadí.

Substituce ve dvojném integrálu – polární souřadnice: $x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad J = \varrho$

Substituce ve dvojném integrálu – zobecněné polární souřadnice:

$$x = a\varrho\cos\varphi + p, \quad y = b\varrho\sin\varphi + q, \quad J = ab\varrho,$$

kde $a, b > 0$ a $\varrho \in (0,1)$. Zobrazuje jednotkový kruh se středem v počátku na elipsu s osami rovnoběžnými s kartézskými osami x a y, s poloosami délky a a b a se středem v bodě $[p,q]$.

Dvojný integrál – aplikace: V dalším je množinou $M \subset \mathbb{R}^2$ modelována tenká deska v rovině xy s plošnou hustotou $\sigma(x,y)$ $\left[\mathrm{kg\,m^{-2}}\right]$.
Výpočet dvojrozměrné míry (obsahu) množiny ve 2D: $\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
Výpočet objemu tělesa $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in M,\ f(x,y) \le z \le g(x,y)\}$ vymezeného grafy funkcí f a g: $\iint_M \big(g(x,y) - f(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
Hmotnost desky: $m = \iint_M \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad [\mathrm{kg}]$
Statický moment vzhledem k ose x: $S_x = \iint_M y\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad [\mathrm{kg\,m}]$
Statický moment vzhledem k ose y: $S_y = \iint_M x\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad [\mathrm{kg\,m}]$
Souřadnice těžiště: $\left(\dfrac{S_y}{m}, \dfrac{S_x}{m}\right)$
Moment setrvačnosti vzhledem k ose x: $I_x = \iint_M y^2\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$
Moment setrvačnosti vzhledem k ose y: $I_y = \iint_M x^2\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$
Moment setrvačnosti vzhledem k ose z: $I_z = \iint_M (x^2+y^2)\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_x + I_y \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$
Obsah S plochy P, která je částí grafu funkce $z = f(x,y)$, kde $(x,y) \in M$:
$S = \iint_M \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Fubiniova věta ve 3D: Nechť $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in N\ \wedge\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\right\}$, kde g_1 a g_2 jsou dvě po částech spojité funkce na μ_2 měřitelné množině $N \subset \mathbb{R}^2$. Nechť dále $f \in C(\overline{M})$. Pro každý bod $P = [x,y] \in N$ definujme $F(P) = \int_{g_1(P)}^{g_2(P)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$. Pak lze trojný integrál $\int_M f\,\mathrm{d}V$ vyjádřit takto
$\int_M f\,\mathrm{d}V = \iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_N F\,\mathrm{d}A = \iint_N F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_N \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}A.$

Věta o substituci v trojném integrálu: Nechť uzávěr $\overline{\Omega}$ oblasti Ω (tj. oblast Ω, k níž je přidána její hranice) v souřadné soustavě u, v, w se zobrazí vztahy $x = x(u,v,w)$, $\quad y = y(u,v,w)$, $\quad z = z(u,v,w)$ vzájemně jednoznačně na uzávěr oblasti M (ozn. $\overline{M}$) v souřadné soustavě x, y, z. Nechť funkce $x, y, z \in C^1(\overline{\Omega})$ a funkce $f \in C(\overline{M})$. Pak

$$\begin{aligned}\int_M f\,\mathrm{d}V &= \iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iiint_\Omega f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \times |J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

kde $J(u,v,w)$ je jakobián (též značen $D(u,v,w)$). Porušení předpokladů na množině nulové μ_3-míry nevadí.

Substituce – cylindrické souřadnice: $x = \varrho\cos\varphi,\quad y = \varrho\sin\varphi,\quad z = \widehat{z}$ (často $z = z$), $\quad J = \varrho$

Substituce – zobecněné cylindrické souřadnice:
$x = a\varrho\cos\varphi + p,\quad y = b\varrho\sin\varphi + q,\quad z = \hat{z}$ (často $z = z$), $\quad J = ab\varrho$, kde $a, b > 0$ a $\varrho \in (0,1)$.

Substituce – sférické souřadnice:
$x = \varrho\cos\lambda\cos\varphi,\quad y = \varrho\sin\lambda\cos\varphi,\quad z = \varrho\sin\varphi,\quad J = \varrho^2\cos\varphi$. Úhel λ měřený „na rovníku," úhel φ měřený na poledníku, od rovníku na sever kladný, na jih záporný.

Substituce – zobecněné sférické souřadnice:
$x = a\,\varrho\cos\lambda\cos\varphi,\quad y = b\,\varrho\sin\lambda\cos\varphi,\quad z = c\,\varrho\sin\varphi,\quad J = abc\,\varrho^2\cos\varphi$,
kde $a, b, c > 0$ a $\varrho \in (0,1)$.

Trojný integrál – aplikace: V dalším je množinou $T \subset \mathbb{R}^3$ modelováno těleso a funkcí $\sigma(x,y,z)$ objemová hustota materiálu $\left[\mathrm{kg\,m^{-3}}\right]$.
Objem tělesa: $V = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
Hmotnost tělesa: $m = \iiint_T \sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad [\mathrm{kg}]$
Statický moment vzhledem k rovině xy: $S_{xy} = \iiint_T z\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad [\mathrm{kg\,m}]$
Statický moment vzhledem k rovině yz: $S_{yz} = \iiint_T x\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad [\mathrm{kg\,m}]$
Statický moment vzhledem k rovině xz: $S_{xz} = \iiint_T y\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad [\mathrm{kg\,m}]$
Souřadnice těžiště: $\left(\dfrac{S_{yz}}{m}, \dfrac{S_{xz}}{m}, \dfrac{S_{xy}}{m}\right)$
Moment setrvačnosti vzhledem k ose x: $I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$
Moment setrvačnosti vzhledem k ose y: $I_y = \iiint_T (x^2+z^2)\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$
Moment setrvačnosti vzhledem k ose z: $I_z = \iiint_T (x^2+y^2)\sigma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$

Parametrizace Ψ křivky C: $\quad C = \{\Psi(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \mathbb{R}^3 :\ t \in [a,b]\}$

Tečný vektor ke křivce C v bodě $[t, \Psi(t)]$: $\quad \Psi'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$

Věta o substituci v křivkovém integrálu 1. druhu:
$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f\big(\Psi(t)\big)\left\|\Psi'(t)\right\|\mathrm{d}t = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$

Křivkový integrál 1. druhu – aplikace: V dalším symbol σ značí délkovou hustotu $\left[\mathrm{kg\,m^{-1}}\right]$ a symbol $\sqrt{\cdots}$ má význam výrazu $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$.
Délka křivky C: $\ \ell = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_C \mathrm{d}s$
Hmotnost: $\ m = \int_a^b \sigma(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_C \sigma\,\mathrm{d}s \quad [\mathrm{kg}]$
Statický moment vzhledem k rovině xy: $\quad S_{xy} = \int_a^b z(t)\sigma(t)\sqrt{\cdots}\,\mathrm{d}t = \int_C z\sigma\,\mathrm{d}s \quad [\mathrm{kg\,m}]$
Statický moment vzhledem k rovině xz: $\quad S_{xz} = \int_a^b y(t)\sigma(t)\sqrt{\cdots}\,\mathrm{d}t = \int_C y\sigma\,\mathrm{d}s \quad [\mathrm{kg\,m}]$
Statický moment vzhledem k rovině yz: $\quad S_{yz} = \int_a^b x(t)\sigma(t)\sqrt{\cdots}\,\mathrm{d}t = \int_C x\sigma\,\mathrm{d}s \quad [\mathrm{kg\,m}]$
Souřadnice těžiště: $\quad \left(\dfrac{S_{yz}}{m}, \dfrac{S_{xz}}{m}, \dfrac{S_{xy}}{m}\right)$
Moment setrvačnosti vzhledem k rovině xy: $\quad I_{xy} = \int_a^b z^2(t)\sigma(t)\sqrt{\cdots}\,\mathrm{d}t = \int_C z^2\sigma\,\mathrm{d}s \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$
Moment setrvačnosti vzhledem k rovině yz: $\quad I_{yz} = \int_a^b x^2(t)\sigma(t)\sqrt{\cdots}\,\mathrm{d}t = \int_C x^2\sigma\,\mathrm{d}s \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$
Moment setrvačnosti vzhledem k rovině xz: $\quad I_{xz} = \int_a^b y^2(t)\sigma(t)\sqrt{\cdots}\,\mathrm{d}t = \int_C y^2\sigma\,\mathrm{d}s \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$
Moment setrvačnosti vzhledem k ose x: $\quad I_x = \int_a^b (y^2(t) + z^2(t))\sigma(t)\sqrt{\cdots}\,\mathrm{d}t = \int_C (y^2+z^2)\sigma\,\mathrm{d}s \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$
Moment setrvačnosti vzhledem k ose y: $\quad I_y = \int_a^b (x^2(t) + z^2(t))\sigma(t)\sqrt{\cdots}\,\mathrm{d}t = \int_C (x^2+z^2)\sigma\,\mathrm{d}s \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$
Moment setrvačnosti vzhledem k ose z: $\quad I_z = \int_a^b (x^2(t) + y^2(t))\sigma(t)\sqrt{\cdots}\,\mathrm{d}t = \int_C (x^2+y^2)\sigma\,\mathrm{d}s \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$
Moment setrvačnosti vzhledem k počátku: $\quad I_0 = \int_a^b (x^2(t) + y^2(t) + z^2(t))\sigma(t)\sqrt{\cdots}\,\mathrm{d}t$
$\qquad = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)\sigma\,\mathrm{d}s \quad [\mathrm{kg\,m^2}]$

Křivkový integrál druhého druhu: $\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,\mathrm{d}s$, kde $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ je vektorové pole, $\vec{T} = \Psi'(t)/\|\Psi'(t)\|$ je jednotkový tečný vektor ke křivce a Ψ je parametrizace křivky. Hodnota integrálu závisí i na orientaci křivky – souhlasná s parametrizací, nesouhlasná s parametrizací. Jiný zápis $\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,\mathrm{d}s = \int_C P\,\mathrm{d}x + \int_C Q\,\mathrm{d}y + \int_C R\,\mathrm{d}z = \int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$.

Ještě jiný zápis $\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

Věta o substituci v křivkovém integrálu 2. druhu: $\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,\mathrm{d}s = \int_a^b \vec{F}\big(\Psi(t)\big)\cdot\Psi'(t)\,\mathrm{d}t$, tedy $\int_C P\,\mathrm{d}x = \int_a^b P\big(\Psi(t)\big)\cdot x'(t)\,\mathrm{d}t,\quad \int_C Q\,\mathrm{d}y = \int_a^b Q\big(\Psi(t)\big)\cdot y'(t)\,\mathrm{d}t,\quad \int_C R\,\mathrm{d}z = \int_a^b R\big(\Psi(t)\big)\cdot z'(t)\,\mathrm{d}t$, je-li parametrizace souhlasná s orientací. V opačném případě $\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,\mathrm{d}s = -\int_a^b \vec{F}\big(\Psi(t)\big)\cdot\Psi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Cirkulace vektorového pole $\vec{F}=(P,Q)$ po uzavřené křivce C: $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,\mathrm{d}s$

Tok vektorového pole $\vec{F}=(P,Q)$ uzavřenou křivkou C: $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s$,
kde $\vec{n}$ je vektor jednotkové vnější normály, přičemž $\vec{T}=(T_1,T_2)$ a $\vec{n}=(T_2,-T_1)$.
Tudíž $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \oint_C P\,\mathrm{d}y - Q\,\mathrm{d}x = \oint_C (-Q)\,\mathrm{d}x + P\,\mathrm{d}y$.

Gradient funkce $f(x,y,z)$, $g(x,y)$: $\nabla f = \operatorname{grad} f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$, $\nabla g = \operatorname{grad} g \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y}\right)$

Rotace vektorového pole $\vec{F}=(P,Q,R)$:

$$\operatorname{rot}\vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Divergence vektorového pole $\vec{F}=(P,Q,R)$: $\operatorname{div}\vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

Potenciál f vektorového pole $\vec{F}=(P,Q,R)$: $\vec{F}=\nabla f = \operatorname{grad} f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Má-li $\vec{F}$ na otevřené množině M potenciál f, pak je konzervativní a pro každou křivku c v M s počátečním bodem A a koncovým bodem B platí $\int_c \vec{F}\cdot\vec{T}\,\mathrm{d}s = f(B)-f(A)$.
Postačující podmínka: Nechť (a) D je jednoduše souvislá oblast(tj. každou uzavřenou křivku v D lze stáhnout do bodu, přičemž během tohoto procesu všechny body křivky zůstávají v D) v $\mathbb{R}^3$ a (b)souřadnicové funkce P,Q,R mají v D spojité parciální derivace, které splňují $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{o}$. Pak $\vec{F}$ je potenciálové pole v D.

Potenciál f vektorového pole $\vec{F}=(P,Q)$: $\vec{F}=\nabla f = \operatorname{grad} f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Platí analogie tvrzení jako pro $\vec{F}=(P,Q,R)$, jen výraz v postačující podmínce (b) má tvar $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$.

Výpočet potenciálu f vektorového pole $\vec{F}=(P,Q,R)$: Buď pomocí křivkového integrálu 2. druhu z bodu (např.) $A=[0,0,0]$ do bodu $B=[x,y,z]$ po vhodně zvolené křivce (např. po částech rovnoběžné se souřadnými osami), nebo využitím toho, že $f=\int P\,\mathrm{d}x + c(y,z)$. Pak derivováním dle y a srovnáním s Q určíme $c'_y(y,z)$ a integrací $c'_y(y,z)$ dle y dále upřesníme f až na funkci $\widehat{c}(z)$. Derivováním f dle z a porovnáním s R získáme $\widehat{c}'(z)$, integrací $\widehat{c}'(z)$ podle z dokončíme výpočet potenciálu f. Na závěr derivováním f ověříme, zda $\vec{F}=\nabla f$.

Parametrizace (regulárního elementu) plochy: Zobrazení z $M\subset\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ dané souřadnicovými funkcemi x,y,z: $X(u,v)=[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]$.

Tečné vektory k ploše v bodě $X(u_0,v_0)$: $\vec{X}_u(u_0,v_0)=\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0),\right)$,
$\vec{X}_v(u_0,v_0)=\left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0),\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0),\frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$

Orientace jednoduché hladké plochy σ: pomocí jednotkového normálového vektoru $\vec{n}$, kde $\vec{n}=\eta\dfrac{\vec{X}_u(u,v)\times\vec{X}_v(u,v)}{\|\vec{X}_u(u,v)\times\vec{X}_v(u,v)\|}$ a $\eta=1$ (σ orientována souhlasně s parametrizací) nebo $\eta=-1$ (σ orientována nesouhlasně s parametrizací).

Plošný integrál skalární funkce f na ploše $\mathcal{P}$, která je obrazem oblasti B při parametrizaci X:
$\iint_{\mathcal{P}} f\,\mathrm{d}S \stackrel{\text{def}}{=} \iint_B f\big(X(u,v)\big)\|\vec{X}_u(u,v)\times\vec{X}_v(u,v)\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

Obsah $S(\mathcal{P})$ plochy $\mathcal{P}$: $S(\mathcal{P}) = \iint_B \|\vec{X}_u(u,v) \times \vec{X}_v(u,v)\| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

Plošný integrál skalární funkce – aplikace:
Plocha $\mathcal{P}$ a $\sigma(X)$ její plošná hustota v bodě $X = [x, y, z]$.
Hmotnost plochy $\mathcal{P}$: $m = \iint_{\mathcal{P}} \sigma(X)\,\mathrm{d}S$
Statické momenty plochy $\mathcal{P}$ vzhledem k souřadnicovým rovinám (viz indexy u S):
$S_{xy} = \iint_{\mathcal{P}} z\sigma(X)\,\mathrm{d}S$, $S_{yz} = \iint_{\mathcal{P}} x\sigma(X)\,\mathrm{d}S$, $S_{xz} = \iint_{\mathcal{P}} y\sigma(X)\,\mathrm{d}S$.
Těžiště plochy $\mathcal{P}$: $T = \left[\dfrac{S_{yz}}{m}, \dfrac{S_{xz}}{m}, \dfrac{S_{xy}}{m}\right]$
Momenty setrvačnosti plochy $\mathcal{P}$ vzhledem k souřadnicovým rovinám (viz indexy u S):
$J_{xy} = \iint_{\mathcal{P}} z^2\sigma(X)\,\mathrm{d}S$, $J_{xz} = \iint_{\mathcal{P}} y^2\sigma(X)\,\mathrm{d}S$, $J_{yz} = \iint_{\mathcal{P}} x^2\sigma(X)\,\mathrm{d}S$
Momenty setrvačnosti plochy $\mathcal{P}$ vzhledem k osám souřadnic:
$J_x = \iint_{\mathcal{P}} (y^2 + z^2)\sigma(X)\,\mathrm{d}S$, $J_y = \iint_{\mathcal{P}} (x^2 + z^2)\sigma(X)\,\mathrm{d}S$, $J_z = \iint_{\mathcal{P}} (x^2 + y^2)\sigma(X)\,\mathrm{d}S$
Moment setrvačnosti plochy $\mathcal{P}$ vzhledem k počátku souřadnic: $J_0 = \iint_{\mathcal{P}} (x^2 + y^2 + z^2)\sigma(X)\,\mathrm{d}S$

Plošný integrál vektorové funkce $\vec{F}$ na ploše $\mathcal{P}$ orientované jednotkovým normálovým vektorem $\vec{n}$, tj. **tok vektorového pole $\vec{F}$ plochou** $\mathcal{P}$: $\iint_{\mathcal{P}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\mathcal{P}} \vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$.

Plošný integrál vektorové funkce $\vec{F}$ na ploše $\mathcal{P}$, která je obrazem oblasti B při parametrizaci X:
$\iint_{\mathcal{P}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_B \vec{F}(X(u,v)) \cdot \big(\vec{X}_u(u,v) \times \vec{X}_v(u,v)\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

Orientace uzavřené plochy: směrem vně, jestliže její jednotkový normálový vektor míří ve všech bodech plochy, ve kterých existuje, do vnějšku plochy. V opačném případě říkáme, že uzavřená plocha je orientována směrem do svého vnitřku.

Gaussova-Ostrogradského věta: Nechť $\vec{F} = (P, Q, R)$ je spojité vektorové pole se spojitými parciálními derivacemi na vnitřku $\operatorname{Int}\mathcal{P}$ uzavřené plochy $\mathcal{P}$ orientované směrem vně.
Pak $\iiint_{\operatorname{Int}\mathcal{P}} \operatorname{div}\vec{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\mathcal{P}} \vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$.

Gaussova-Ostrogradského věta – aplikace: Např. výpočet objemu $V = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ tělesa $T = \operatorname{Int}\mathcal{P}$, kdy stačí použít libovolnou funkci $\vec{F}$ takovou, aby $\operatorname{div}\vec{F} = 1$.

Orientace křivky na ploše: Nechť $\mathcal{P}$ je orientovaná plocha a nechť $\mathcal{K}$ je uzavřená jednoduchá konečná po částech hladká křivka na $\mathcal{P}$. Řekneme, že $\mathcal{K}$ je kladně orientována vzhledem k orientované ploše $\mathcal{P}$, jestliže – sledováno ze strany vnější normály – při probíhání křivky $\mathcal{K}$ v kladném smyslu zůstává část plochy $\mathcal{P}$ uzavřená křivkou $\mathcal{K}$ po levé straně.

Stokesova věta: Nechť $\mathcal{P} \subset D \subset \mathbb{R}^3$ je orientovaná neuzavřená plocha, jejíž okraj je uzavřená jednoduchá křivka $\mathcal{K}$ kladně orientovaná vzhledem k $\mathcal{P}$. Nechť $\vec{F}$ je spojité vektorové pole se spojitými parciálními derivacemi v D. Potom $\oint_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s = \iint_{\mathcal{P}} \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$, kde $\vec{t}$ značí jednotkový tečný vektor křivky $\mathcal{K}$.

Greenova věta: Nechť $\mathcal{P} \subset D \subset \mathbb{R}^3$ je uzavřená plocha orientovaná směrem ven a funkce $f(X) = f(x_1, x_2, x_3)$, $g(X) = g(x_1, x_2, x_3)$ jsou spojité v D včetně parciálních derivací dle x_1, x_2, x_3.
Pak $\displaystyle\iiint_{\operatorname{Int}\mathcal{P}} \frac{\partial f}{\partial x_i} g\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \iint_{\mathcal{P}} f g n_i\,\mathrm{d}S - \iiint_{\operatorname{Int}\mathcal{P}} f \frac{\partial g}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$, kde $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ a $i = 1, 2, 3$.

Základní neurčité integrály (bez integrační konstanty): $\displaystyle\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ $(k \neq -1)$,
$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}s = \ln|x|$; $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$; $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$; $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$;
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$; $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$; $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$; $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

Gaussova-Legendrova numerická integrace: $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y} w_{x_i} w_{y_j} f(x_i, y_j)$;

pro $n = 1$ integrační bod $t_1 = 0$ s vahou $w_{t_1} = 2$, pro $n = 2$ integrační body $t_1 = -1/\sqrt{3}$, $t_2 = 1/\sqrt{3}$ s vahami $w_{t_1} = w_{t_2} = 1$, pro $n = 3$ integrační body $t_1 = -\sqrt{3}/\sqrt{5}$, $t_2 = 0$, $t_3 = \sqrt{3}/\sqrt{5}$ s vahami $w_{t_1} = w_{t_3} = 5/9$, $w_{t_2} = 8/9$. Integrační bod(y) jak ve směru x, tak ve směru y.