MA3G 1. 1. 2023 **Jméno a příjmení:**

Příklad 1 (29 b.): Najděte maximální oblasti v $\mathbb{R}^3$, pro něž je vektorové pole

$$\boldsymbol{f} = \left(\frac{y^2}{2\sqrt{x}} + 3z + 3,\ 2\sqrt{x}\, y + 2z\cos y,\ 3x + 2\sin y + 2z \right)$$

definované. V každé oblasti ověřte, že je v ní splněna postačující podmínka pro to, aby pole $\boldsymbol{f}$ bylo potenciální. Určete potenciál pole $\boldsymbol{f}$ takový, aby v bodě $A = [1, 0, 2]$ měl hodnotu 7.

Příklad 2 (27 b.): Na ploše (geografickém lichoběžníku)

$$\sigma_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \ \wedge\ x < 0 \ \wedge\ z > -r/\sqrt{2} \ \wedge\ 2z < r\},$$

kde $r > 0$ je daný parametr, vypočítejte plošný integrál funkce $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)\, z$.

Příklad 3 (16 b.): Určete práci vykonanou působením síly

$$\boldsymbol{f} = \left(x + y, 8z - 2y^2 - x^3, x - z^2\right)$$

po křivce $c = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 - 4y = 0 \ \wedge\ z = \dfrac{1}{2}xy \right\}$ z bodu $A = [2, 1, 1]$ do bodu $B = [0, 0, 0]$, křivka c je tedy orientovaná od A do B.

Body z písemky:[a]

Body z testu:

Body z DÚ:

Celkem: Zápočet: Známka:

[a]Nutná podmínka pro udělení zápočtu – aspoň 15 bodů.

(Řešení na další stránce.)

Řešení příkladu 1: Vidíme, že kvůli $\sqrt{x}$ a $1/\sqrt{x}$ musí být splněno $x > 0$, tj.

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{f}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x > 0\},$$

jde tedy jen o jednu oblast.

Oblast $\mathcal{D}_{\boldsymbol{f}}$ je jednoduše souvislá. Zbývá ověřit, že $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}$. Složky vektorové funkce $\boldsymbol{f}$ označme po řadě P, Q a R. Počítejme

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \boldsymbol{f} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \left(2\cos y - 2\cos y, 3 - 3, \frac{2y}{2\sqrt{x}} - \frac{2y}{2\sqrt{x}} \right) = \boldsymbol{o}.\end{aligned}$$

Pole $\boldsymbol{f}$ tedy je potenciální.

Postupný výpočet potenciálu φ. Nejprve integrujme například složku P dle x

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) = \int P \mathrm{d}x + \psi_1(y, z) &= \int \left(\frac{y^2}{2\sqrt{x}} + 3z + 3 \right) \mathrm{d}x + \psi_1(y, z) \\ &= \sqrt{x} y^2 + 3xz + 3x + \psi_1(y, z).\end{aligned}$$

Z rovnosti $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ odvodíme

$$\begin{aligned}2\sqrt{x}\, y + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(y, z) &= 2\sqrt{x}\, y + 2z \cos y, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(y, z) &= 2z \cos y, \\ \psi_1(y, z) &= 2z \sin y + \psi_2(z), \\ \varphi(x, y, z) &= \sqrt{x} y^2 + 3xz + 3x + 2z \sin y + \psi_2(z).\end{aligned}$$

Z rovnosti $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = R$ odvodíme[1]

$$\begin{aligned}3x + 2\sin y + \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}z}(z) &= 3x + 2\sin y + 2z, \\ \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}z}(z) &= 2z, \\ \psi_2(z) &= z^2 + c, \\ \varphi(x, y, z) &= \sqrt{x} y^2 + 3xz + 3x + 2z \sin y + z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Správnost nalezeného potenciálu lze potvrdit ověřením rovnosti $\nabla \varphi(x, y, z) = \boldsymbol{f}(x, y, z)$.

V bodě $A = [1, 0, 2]$ má být $7 = \varphi(1, 0, 2) = 6 + 3 + 4 + c$, odtud $c = -6$ a $\varphi(x, y, z) = \sqrt{x} y^2 + 3x + 3xz + 2z \sin y + z^2 - 6$.

Řešení příkladu 2: Plocha σ_r je částí kulové plochy (sféry). Částí, která je vymezena rovinou yz a dvěma rovinami rovnoběžnými se souřadnou rovinou xy, viz obr. 1.

Plochu můžeme parametrizovat výrazy, které známe ze substituce do sférických souřadnic, tj. s využitím vztahů $x = r \cos \lambda \cos \varphi$, $\quad y = r \sin \lambda \cos \varphi$, $\quad z = r \sin \varphi$. Plochu σ_r tedy budeme parametrizovat zobrazením

$$\boldsymbol{G}(r; \lambda, \varphi) = (r \cos \lambda \cos \varphi, r \sin \lambda \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

---

[1] Funkce ψ_2 závisí jen na proměnné z, proto už nepoužijeme značení pro parciální derivaci.

Obrázek 1. K příkladu 2. Plocha σ_r, kde $r = 1$.

Rozsahy $\lambda \in (\pi/2, 3\pi/2)$ a $\varphi \in (-\pi/4,\ \pi/6)$ lze odvodit např. úvahou nebo z náčrtku, případne výpočtem z nerovností vymezujících plochu

$$
\begin{aligned}
&x < 0 \;\Rightarrow\; r\cos\lambda\cos\varphi < 0 \;\stackrel{r>0,\,\cos\varphi>0}{\Rightarrow}\; \cos\lambda < 0 \;\Rightarrow\; \lambda \in (\pi/2, 3\pi/2);\\
&z > -r/\sqrt{2} \;\Rightarrow\; r\sin\varphi > -r/\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \sin\varphi > -\sqrt{2}/2 \;\Rightarrow\; \varphi > -\pi/4,\\
&2z < r \;\Rightarrow\; 2r\sin\varphi < r \;\Rightarrow\; \sin\varphi < 1/2 \;\Rightarrow\; \varphi < \pi/6.
\end{aligned}
$$

Než začneme integrovat, spočteme[2]

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{G}_\lambda(r;\lambda,\varphi) \times \boldsymbol{G}_\varphi(r;\lambda,\varphi)\|\\
&\quad = \|(-r\sin\lambda\cos\varphi, r\cos\lambda\cos\varphi, 0) \times (-r\cos\lambda\sin\varphi, -r\sin\lambda\sin\varphi, r\cos\varphi)\|\\
&\quad = \|(r\cos\lambda\cos\varphi\, r\cos\varphi - 0,\ 0 + r\sin\lambda\cos\varphi\, r\cos\varphi,\\
&\qquad\quad r\sin\lambda\cos\varphi\, r\sin\lambda\sin\varphi + r\cos\lambda\cos\varphi\, r\cos\lambda\sin\varphi)\|\\
&\quad = \|(r^2\cos\lambda\cos^2\varphi,\ r^2\sin\lambda\cos^2\varphi,\ r^2\sin^2\lambda\cos\varphi\sin\varphi + r^2\cos^2\lambda\cos\varphi\sin\varphi)\|\\
&\quad = \|(r^2\cos\lambda\cos^2\varphi,\ r^2\sin\lambda\cos^2\varphi,\ r^2\cos\varphi\sin\varphi)\|\\
&\quad = \sqrt{r^4\cos^2\lambda\cos^4\varphi + r^4\sin^2\lambda\cos^4\varphi + r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\\
&\quad = r^2\sqrt{\cos^4\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\varphi} = r^2\sqrt{\cos^2\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = r^2\cos\varphi,
\end{aligned}
$$

kde jsme využili rovností $\sin^2\lambda + \cos^2\lambda = 1$, $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ a toho, že pro $\varphi \in (-\pi/4,\ \pi/6)$ je $\cos\varphi > 0$.

Funkci f vyjádříme v proměnných λ, φ a s parametrem r, transformovanou funkci označíme $\widehat{f}$. Konkrétně

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(r,\lambda,\varphi) &= \big((r\cos\lambda\cos\varphi)^2 + (r\sin\lambda\cos\varphi)^2\big)\, r\sin\varphi\\
&= \big(r^2\cos^2\varphi\big)\, r\sin\varphi = r^3\sin\varphi\cos^2\varphi
\end{aligned}
$$

[2]Jde délku normálového vektoru daného vektorovým součinem tečných vektorů získaných parciální derivací funkce $\boldsymbol{G}$ podle λ a φ.

Nyní již můžeme integrovat[3]

$$\iint_{\sigma_r} f \mathrm{d}S = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/4}^{\pi/6} r^3 \sin\varphi \cos^2\varphi \, r^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\lambda = \pi r^5 \int_{-\pi/4}^{\pi/6} \sin\varphi \cos^3\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$
$$= -\frac{\pi r^5}{4}\left[\cos^4\varphi\right]_{-\pi/4}^{\pi/6} = -\frac{\pi r^5}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right]$$
$$= -\frac{\pi r^5}{64}(9-4) = -\frac{5\pi r^5}{64},$$

což je hledaný výsledek.

Řešení příkladu 3: Obecně můžeme mít dvě cesty k cíli. Pokud je pole $\boldsymbol{f}$ potenciální, stačí najít jeho potenciál a práci spočítat jako rozdíl potenciálu v koncovém a počátečním bodě křivky. Pole $\boldsymbol{f}$ však potenciální není, musíme tedy postupovat jiným způsobem, tj. definovat a spočítat křivkový integrál druhého druhu.

Nejprve určíme nějakou parametrizaci Ψ křivky c. Zvolme například $x = t$ a zbývající vztahy dopočítejme:

$$x = t, \quad y = \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}t^2, \quad z = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{8}t^3.$$

Křivka c spojuje body A a B. Pro $t = 0$ dostáváme bod B, bodu A dosáhneme při $t = 2$, tj. $t \in [0,2]$ a $c(\Psi(0)) = B,\ c(\Psi(2)) = A$. Parametrizace Ψ tedy je *nesouhlasná* s orientací křivky c.

Souřadnicové funkce pole $\boldsymbol{f}$ označme po řadě P, Q a R a vyjádřeme je v parametru t, také stanovme závislost infinitezimální změny souřadnic x, y a z na infinitezimální změně parametru t

$$P = x + y = \frac{1}{4}t^2 + t, \quad \mathrm{d}x = 1\mathrm{d}t;$$
$$Q = 8z - 2y^2 - x^3 = t^3 - \frac{2}{16}t^4 - t^3 = -\frac{1}{8}t^4, \quad \mathrm{d}y = \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t;$$
$$R = x - z^2 = t - \frac{1}{64}t^6, \quad \mathrm{d}z = \frac{3}{8}t^2\mathrm{d}t.$$

Křivkový integrál druhého druhu počítaný s parametrizací Ψ

$$\int_c \boldsymbol{f}\cdot\vec{T}\mathrm{d}s = \int_c P\mathrm{d}x + \int_c Q\mathrm{d}y + \int_c R\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^2 \left(\left(\frac{1}{4}t^2 + t\right) + \left(-\frac{1}{8}t^4\right)\frac{1}{2}t + \left(t - \frac{1}{64}t^6\right)\frac{3}{8}t^2\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^2 \left(t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{16}t^5 + \frac{3}{8}t^3 - \frac{3}{8\cdot 64}t^8\right)\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{12}t^3 - \frac{1}{6\cdot 16}t^6 + \frac{3}{32}t^4 - \frac{3}{8\cdot 9\cdot 64}t^9\right]_0^2 = 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{19}{6}.$$

Víme, že parametrizace Ψ je *nesouhlasná* s orientací křivky c. Tečné vektory ke křivce orientované dle zadání tedy mají orientaci opačnou, než je orientace tečných vektorů počítaných pomocí derivace parametrizace Ψ, a jejich skalární součin s vektorovým polem $\boldsymbol{f}$ (zásadní myšlenka křivkového integrálu druhého druhu) má opačné znaménko, než s jakým byl proveden výpočet. Hledaná práce tudíž má hodnotu $-\frac{19}{6}$.[4]

[3]Po transformaci souřadnic integrujeme součin $\widehat{f}(r,\lambda,\varphi)\|\boldsymbol{G}_\lambda(r;\lambda,\varphi)\times\boldsymbol{G}_\varphi(r;\lambda,\varphi)\|$.

[4]Povšimněte si, že volba $x = 2t$ vede k parametrizaci $y = t^2$, $z = t^3$, kde $t \in [0,1]$, s níž je výpočet integrálu jednodušší. Výsledek je ovšem shodný. Vhodnou volbou parametrizace si lze ušetřit práci.