MA3G Zadání a řešení

Příklad 1 (29 b): Definiční obor vektorového pole

$$\boldsymbol{f} = \left(\frac{1}{x} + 3x^2 + y2^{4z},\ \frac{\cos y}{z} + x2^{4z},\ \frac{1}{z} - \frac{\sin(y)}{z^2} + 4xy2^{4z}\ln 2\right)$$

je tvořen několika neomezenými oblastmi (tj. otevřenými souvislými množinami) v $\mathbb{R}^3$. Najděte a matematicky zapište maximální oblast Ω, pro niž platí (zároveň), že pole $\boldsymbol{f}$ je definováno na Ω a že bod $[1,-1,1] \in \Omega$. Neověřujte, zda v Ω je splněna postačující podmínka pro to, aby pole $\boldsymbol{f}$ bylo potenciální, ale nalezněte jeho potenciál φ takový, že $\varphi(A) = 8(1+\pi)$, kde bod $A = [1, \pi/2, 1]$. Zkontrolujte správnost vypočteného potenciálu φ.

Řešení: Vidíme, že $x \neq 0$, $z \neq 0$, avšak $y \in \mathbb{R}$. Odtud

$$\Omega = \{[x,y,z] \in \mathbb{R} :\ x > 0\ \wedge z > 0\} = (0,+\infty) \times \mathbb{R} \times (0,+\infty).$$

Nalezení potenciálu. Označme $\boldsymbol{f} = (P,Q,R)$.

$$\varphi = \int \left(\frac{1}{x} + 3x^2 + y2^{4z}\right) \mathrm{d}x = \ln x + xy2^{4z} + x^3 + c(y,z).$$

Derivováním φ dle y a srovnáním s Q dostaneme

$$\begin{aligned} c'_y(y,z) &= \frac{\cos y}{z}, \\ c(y,z) &= \frac{\sin y}{z} + d(z), \\ \varphi &= \ln x + xy2^{4z} + x^3 + \frac{\sin y}{z} + d(z). \end{aligned}$$

Derivováním φ dle z a srovnáním s R dostaneme

$$\begin{aligned} d'(z) &= \frac{1}{z}, \\ d(z) &= \ln z + K, \\ \varphi(x,y,z) &= \ln x + xy2^{4z} + x^3 + \frac{\sin y}{z} + \ln z + K \\ &= \ln(xz) + xy2^{4z} + x^3 + \frac{\sin y}{z} + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Srovnáním $\varphi(A) = \ln 1 + \frac{\pi}{2}2^4 + 1^3 + \frac{1}{1} + K = 8\pi + 2 + K$ s hodnotou $8(1+\pi)$ dostáváme $K = 6$. Derivováním se ověří, že $\nabla\varphi = \boldsymbol{f}$.

Příklad 2 (27 b): Nechť uzavřená plocha $\mathcal{P}$ tvoří hranici kulového vrchlíku $T = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq 1\}$ a je orientována směrem vně. Spočítejte tok vektorového pole $\boldsymbol{F} = (x^3, y^3, z^2)$ plochou $\mathcal{P}$. [Poznámka: Uvědomte si, že tok plochou lze počítat různými a výpočetně různě složitými způsoby, například též dle Gaussovy-Ostrogradského věty.]

Řešení: Využijeme Gaussovu-Ostrogradského větu $\iint_{\mathcal{P}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_{\mathrm{Int}\,\mathcal{P}} \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ a cylindrické souřadnice $x = \varrho\cos\varphi$, $\quad y = \varrho\sin\varphi$, $\quad z = \widehat{z}$ $\quad J = \varrho$, kde $\varphi \in (0, 2\pi)$, $r \in (0, \sqrt{3})$ a $z \in [1, \sqrt{4-\varrho^2}]$. Pak $\mathcal{P}\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 3x^2 + 3y^2 + 2z$ a (označme tok w)

$$w = \iiint_{\mathrm{Int}\,\mathcal{P}} \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-\varrho^2}} (3\varrho^2 + 2\widehat{z})\varrho\,\mathrm{d}\widehat{z}\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Počítejme

$$
\begin{aligned}
w &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \left[3\varrho^3\widehat{z} + \varrho\widehat{z}^2\right]_1^{\sqrt{4-\varrho^2}} \,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \left(3\varrho^3\sqrt{4-\varrho^2} - 3\varrho^3 + \varrho(4-\varrho^2) - \varrho\right) \mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \left(3\varrho^3\sqrt{4-\varrho^2} - 4\varrho^3 + 3\varrho\right) \mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} 3\varrho^3\sqrt{4-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho + 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(-4\varrho^3 + 3\varrho\right)\mathrm{d}\varrho = w_1 + w_2.
\end{aligned}
$$

Zaveďme substituci

$$
4 - \varrho^2 = t \;\Rightarrow -2\varrho\,\mathrm{d}\varrho = \mathrm{d}t, \quad \text{meze: } 0 \mapsto 4, \;\; \sqrt{3} \mapsto 1
$$

a pokračujme

$$
\begin{aligned}
w_1 &= 3\pi\int_1^4 (4-t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 3\pi\left[\frac{8}{3}t^{3/2} - \frac{2}{5}t^{5/2}\right]_1^4 = 3\pi\left[\frac{64}{3} - \frac{64}{5} - \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{5}\right)\right] \\
&= 3\pi\left[\frac{128}{15} - \frac{34}{15}\right] = 3\pi\frac{94}{15} = \frac{94}{5}\pi; \\
w_2 &= 2\pi\left[-\varrho^4 + \frac{3}{2}\varrho^2\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi\left[-9 + \frac{9}{2}\right] = -9\pi; \\
w &= w_1 + w_2 = \frac{94}{5}\pi - \frac{45}{5}\pi = \frac{49}{5}\pi.
\end{aligned}
$$

Příklad 3 (16 b): Pomocí vhodné parametrizace křivky $c = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 - y - 2 = 0 \;\wedge\; z = x + y\}$ určete práci vykonanou působením síly

$$
\boldsymbol{f} = \left(z, \frac{y}{x}, y\right)
$$

po křivce c z bodu $A = [2,2,4]$ do bodu $B = [1,-1,0]$; křivka c je orientovaná od A do B. [Poznámky: (a) Při definování parametrizace vám může pomoci náčrtek kolmého průmětu křivky c do roviny xy. (b) Nezapomeňte na vztah parametrizace a orientace křivky.]

Řešení: V rovině xy je průmětem křivky parabola $y = x^2 - 2$. Parametrizaci Φ zvolíme například takto

$$
x = t, \quad y = t^2 - 2, \quad z = t^2 + t - 2, \quad t \in [1,2], \quad c(\Phi(1)) = B, \; c(\Phi(2)) = A,
$$

parametrizace je *nesouhlasná* s orientací křivky.

Obecný vztah

$$
\int_c \boldsymbol{f}\cdot\vec{T}\,\mathrm{d}s = \int_c P\,\mathrm{d}x + \int_c Q\,\mathrm{d}y + \int_c R\,\mathrm{d}z.
$$

Máme

$P = z = t^2 + t - 2, \;\; \mathrm{d}x = 1\,\mathrm{d}t; \quad Q = y/x = (t^2-2)/t, \;\; \mathrm{d}y = 2t; \quad R = y = t^2 - 2, \;\; \mathrm{d}z = 2t+1,$

tedy (v rovnosti ♠ se nesouhlasná parametrizace projeví znaménkem minus)

$$
\begin{aligned}
\int_c \boldsymbol{f}\cdot\vec{T}\,\mathrm{d}s &\overset{\spadesuit}{=} -\int_1^2 \left(t^2 + t - 2 + 2t^2 - 4 + (t^2-2)(2t+1)\right)\mathrm{d}t = -\int_1^2 \left(2t^3 + 4t^2 - 3t - 8\right)\mathrm{d}t \\
&= -\left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 8t\right]_1^2 = -\left[8 + \frac{32}{3} - 6 - 16 - \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} - 8\right)\right] \\
&= -\left(-14 + \frac{32}{3} + 8 - \frac{1}{3}\right) = -\left(-6 + \frac{31}{3}\right) = -\frac{13}{3}.
\end{aligned}
$$

Vykonaná práce je $-\dfrac{13}{3}$.