

Test MA3G: Ukázka 1

Otázka 1 (4 b.) Nechť $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \leq 1 \wedge y \leq 0\}$. Dvojný integrál $\int_M f(x, y) \, dA$, kde f je libovolná funkce dvou proměnných spojitá na M , je roven

- a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{3}}^0 f(x, y) \, dy \, dx$ b) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-9y^2}}^0 f(x, y) \, dx \, dy$
- c) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x, y) \, dx \, dy$ d) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{3}\sqrt{1-4x^2}}^0 f(x, y) \, dy \, dx$
- e) $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{3}\sqrt{1-4x^2}}^0 f(x, y) \, dy \, dx$

Otázka 2 (8 b.) Nechť $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x \wedge (x, y) \neq (0, 0)\}$. Pak dvojný integrál $\int_M \frac{x}{x^2 + y^2} \, dA$ je roven [doporučuje se zvolit x za vnější integrační proměnnou]

- a) $\frac{1}{4} \ln 2$ b) $\ln 2 + \frac{1}{4}\pi$ c) $2 \ln 2 + \frac{1}{4}\pi$ d) $\frac{3}{2} \ln 2$ e) $\frac{1}{2} \ln 2$

Otázka 3 (4 b.) Nechť $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2y \wedge |x| \leq y\}$. Dvojný integrál $\int_M (x^2 + y^2) \, dA$ je po substituci do polárních souřadnic ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$) roven

- a) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{2\sin \varphi} r^2 \, dr \, d\varphi$ b) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{2\cos \varphi} r^3 \, dr \, d\varphi$
- c) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\sin \varphi} r^3 \, dr \, d\varphi$ d) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{\sin \varphi} r^3 \, dr \, d\varphi$
- e) $2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\sin \varphi} r^3 \, dr \, d\varphi$

Otázka 4 (4 b.) Objem válcového tělesa

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi \wedge 0 \leq y \leq \sin x \wedge 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \right\}$$

je roven hodnotě dvojnásobného integrálu

- a) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} (x^2 + y^2) dy dx$ b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{x^2+y^2} \sin x dy dx$
c) $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy$ d) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin(x^2+y^2)} dy dx$
e) $\int_0^{\sin x} \int_0^{\pi/2} (x^2 + y^2) dy dx$

Otázka 5 (8 b.) Objem tělesa

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0 \right\}$$

je roven hodnotě trojnásobného integrálu

- a) $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{\varrho} \varrho dz d\varrho d\varphi$ b) $\int_0^{\pi/2} \int_{-1}^1 \int_0^{\varrho} \varrho dz d\varrho d\varphi$
c) $\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\varrho} \varrho dz d\varrho d\varphi$ d) $\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\varrho^2} \varrho dz d\varrho d\varphi$
e) $\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\varrho} \varrho^2 dz d\varrho d\varphi$

[Správně: d – e – c – a – c]