

Zápočtová písemka z předmětu Matematika R1 č. 2 (VZOR)

Příjmení a jméno:

Datum:

Výpočty zapisujte dostatečně podrobně (včetně mezivýsledků). Popište všechny podstatné úvahy.

1. Najděte hodnotu parametru $\lambda \in \mathbf{R}$, pro kterou má soustava lineárních rovnic (6 b.)

$$\begin{aligned}x + 3y + 2z &= 3 \\2x + 5y + z &= 4 \\x + 4y + \lambda z &= 5\end{aligned}$$

s neznámými x, y, z nekonečně mnoho řešení. Pro tuto hodnotu parametru λ vypočítejte všechna řešení soustavy.

-
2. Nechť W je lineární obal skupiny vektorů $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$, kde (6 b.)

$$\mathbf{u}_1 = (4, 5, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 2, 0), \quad \mathbf{u}_3 = (5, 4, 2).$$

Vypočítejte dimenzi vektorového prostoru W a uveďte příklad jeho báze. Najděte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro něž vektor $\mathbf{w} = (2, 3, a)$ leží ve W .

-
3. Je dána matice (6 b.)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 2 \\ 2, & m, & 6 \\ 3, & 1, & m \end{pmatrix},$$

kde $m \in \mathbf{R}$ je parametr. Vypočítejte determinant matice $\mathbf{M}$ a určete všechny hodnoty parametru m , pro něž je matice $\mathbf{M}$ regulární.

-
4. Jsou dány body (6 b.)

$$A = [1, 3, 2], \quad B = [2, 5, 5], \quad C = [3, 5, 7].$$

Najděte obecnou rovnici roviny ABC a vypočítejte vzdálenost počátku soustavy souřadnic od roviny ABC .

Výsledky:

- soustava má nekonečně mnoho řešení $\iff \lambda = 5$: $(x, y, z) = (-3, 2, 0) + \alpha(7, -3, 1)$, $\alpha \in \mathbf{R}$
- $\dim W = 2$, báze: např: $\langle (1, 2, 0), (0, -3, 1) \rangle$; $\mathbf{w} \in W \iff a = \frac{1}{3}$
- $\det \mathbf{M} = m^2 - 8m + 16$, $\mathbf{M}$ je regulární $\iff m \in \mathbf{R} \setminus \{4\}$
- obecná rovnice roviny ABC : $4x + y - 2z - 3 = 0$, vzdálenost: $\frac{1}{7}\sqrt{21}$