



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta stavební

Doktorský studijní program: **STAVEBNÍ INŽENÝRSTVÍ**
Studijní obor: **Matematika ve stavebním inženýrství**

Mgr. Jana Čápková, roz. Vecková

MODELOVÁNÍ MEMBRÁNOVÝCH KONSTRUKCÍ

FORM FINDING OF MEMBRANE STRUCTURES

DISERTAČNÍ PRÁCE K ZÍSKÁNÍ AKADEMICKÉHO TITULU PHD.

Školitel: doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.

Praha, září 2010

Poděkování

Na tomto místě bych ráda vzpomněla na svého původního školitele doc. RNDr. Jaroslava Černého, CSc., který se bohužel předložení mé disertační práce nedožil a který mě neustále inspiroval svou pracovitostí a neutuchající životní energií. Touto cestou děkuji prof. RNDr. Ivo Markovi, DrSc., za pročtení mé práce a cenné připomínky. Mé velké díky patří i kolegům doc. RNDr. Petru Kučerovi, CSc., a ing. Michalu Benešovi, PhD., za čas, který věnovali společným konzultacím mého problému. Nemalé díky patří i mé nové školitelce doc. RNDr. Miladě Kočandrlové, CSc., která obětavě převzala vedení nad mojí disertační prací a byla mi velkou oporou. V neposlední řadě bych ráda poděkovala své rodině, která mi vytvořila dobré zázemí pro skloubení studia s pracovním vytížením.

Tato práce byla během mého studia podpořena těmito granty: Interní grantová soutěž ČVUT 2006 CTU0613011, Studentská grantová soutěž ČVUT 2010 OHK1-062/10.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou disertační práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Praze dne

podpis

Abstrakt

Předkládaná disertační práce je zaměřená na modelování počátečního rovnovážného stavu membránové konstrukce bez ohledu na použitý materiál. V celkovém složitém procesu navrhování kompletní membránové struktury se jedná o první tvar membrány, který se dále analyzuje v závislosti na zvolených materiálech a klimatických podmínkách umístění konstrukce. Membrána je v této práci modelována plochou v trojrozměrném prostoru. Práce vychází jednak z minimalizace plošného funkcionálu a jednak z rovnice rovnováhy. Pro vybrané současné metody modelování, jmenovitě metodu sítě, metodu hustoty síly a metodu hustoty plošného napětí, je sestaven vlastní program v softwaru Maple a uvedeny příklady, které jsou výstupy z těchto programů. Dále je podrobně rozpracována metoda aktualizovaných referenčních konfigurací a upravena pro použití isogeometrických prvků založených na neuniformních racionálních B-spline funkcích. Pro uvedené metody modelování je vybrána úloha na zborceném čtyřúhelníku, kterou lze všemi metodami úspěšně řešit, abychom docílili jejich vzájemného srovnání.

Klíčová slova: počáteční rovnovážný stav, membránová konstrukce, minimální plocha, metoda konečných prvků, isogeometrická analýza.

Abstract

The thesis is devoted to the modelling of the initial equilibrium state of a membrane structure without reference to used material. In whole complicated process of the form-finding of the membrane structure this is the first shape of the membrane that is consequently analysed depending on the chosen material and on the climatic conditions of the place, where the structure is intended to locate. The initial equilibrium state of the membrane is modelled by a surface in the three dimensional space. The thesis starts from the minimalization of the area functional or is governed by the equilibrium equation. For the selected contemporary methods of the modelling, namely grid method, force density method and surface stress density method, the own programmes are proposed in the software Maple and the number of applications as the outcomes of those programmes is presented. Further the update reference strategy method is elaborated and modified to the isogeometric elements based on the non-uniform rational B-splines. The problem with a warp quadrilateral boundary is selected to compare the mentioned methods, because it is successfully solvable by all of them.

Key words: form finding, initial equilibrium state, membrane structure, minimal surface, finite element method, isogeometric analysis.

Obsah

Seznam použitého značení	vii
Úvod	1
1 Historie a současnost membránových konstrukcí	3
1.1 Historie membránových konstrukcí	3
1.2 Membránové konstrukce současnosti	4
2 Využití a vlastnosti membránových konstrukcí	8
3 Formulace úlohy	11
3.1 Diferenciální geometrie ploch	11
3.2 Minimální plocha	14
3.2.1 Plateauův problém	15
3.2.2 Fyzikální vlastnosti minimální plochy	15
3.2.3 Minimální plocha zadaná explicitně	17
3.2.4 Porovnání fyzikálně a matematicky získané podmínky	18
3.2.5 Minimální plocha zadaná parametricky	19
3.2.6 Klasická a variační formulace úlohy	21
3.2.7 Existence a jednoznačnost řešení Plateauova problému	22
3.3 Membránová konstrukce	29
4 Isogeometrická analýza	41
4.1 NURBS křivky a plochy	42
4.2 Zjemňování NURBS bazových funkcí	50
4.2.1 Vkládání uzlů	50
4.2.2 Zvyšování stupně	62
4.3 Isogeometrická metoda	72
5 Modelování minimálních ploch	75
5.1 Minimální Bézierova plocha	75
5.1.1 Formulace Plateauova-Bézierova problému	75

5.1.2	Demonstrační příklady	80
5.2	Minimální B-spline plocha	85
5.2.1	Formulace Plateauova B-spline problému	85
5.2.2	Demonstrační příklady	88
6	Modelování rovnovážného stavu	95
6.1	Metoda sítě	95
6.2	Metoda hustoty síly	101
6.3	Metoda hustoty plošného napětí	109
6.4	Metoda aktualizovaných referenčních konfigurací	117
6.5	Modifikovaná metoda aktualizovaných referenčních konfigurací	121
6.5.1	Teorie	121
6.5.2	Demonstrační příklady	123
	Závěr	127
	Literatura a ostatní zdroje	130

Seznam obrázků

1.1	Nižní Novgorod, Rusko	3
1.2	Věž na Šabolovce, Moskva, Rusko	4
1.3	Sportovní stadion, Tokio, Japonsko	4
1.4	Expo '67, Montreal, Kanada	5
1.5	Canada Place, Vancouver, Kanada	5
1.6	Letiště, Denver, USA	6
1.7	Millenium Dome, Londýn, Velká Británie	6
1.8	Divadlo, Budapešť, Maďarsko	7
1.9	Dubai, Spojené arabské emiráty	7
2.1	Zahrada Eden Cornwall, Velká Británie	9
3.1	Tramvajová zastávka K Barrandovu, Praha	12
3.2	Plošný integrál	12
3.3	Zvětšující se povrch plochy	16
3.4	Deformace plochy	31
3.5	Práce	35
3.6	Obecný vektor napětí v křivočarých souřadnicích	40
4.1	Schematická souvislost mezi prostory	42
4.2	B-spline báze funkce multého až 3. stupně (barva odpovídá i -té báze funkci; segmenty jednotlivých báze funkcí jsou zvýrazněny pravidelně se střídající různou tloušťkou; zašedlé části intervalu značí <i>pasivní</i> intervaly); $\Xi = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$	44
4.3	NURBS báze funkce 1. až 3. stupně (barva odpovídá i -té báze funkci; segmenty jednotlivých báze funkcí jsou zvýrazněny pravidelně se střídající různou tloušťkou; zašedlé části intervalu značí <i>pasivní</i> intervaly); $\Xi = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$, váhy konstantně rovny 1	45
4.4	Homogenní souřadnice v \mathbb{R}^2	46
4.5	Vložení uzlu	55
4.6	Zjemnění uzlového vektoru NURBS reprezentace kružnice	58

4.7	Kružnice $\mathbf{X}(\theta)$ v \mathbb{R}^2 vytvořená projektivním zobrazením po částech kvadratické B-spline křivky $\mathbf{X}^w(\theta)$	59
4.8	Kružnice $\mathbf{X}(\theta)$ v \mathbb{R}^2 vytvořená projektivním zobrazením po částech kvadratické B-spline křivky $\mathbf{X}^w(\theta)$	60
4.9	B-spline plocha včetně řídicí sítě před zjemněním	61
4.10	B-spline plocha včetně řídicí sítě po zjemnění	61
4.11	Zvyšování stupně	71
5.1	Katenoid	79
5.2	Hranice, kterou by mýdlová bublina díky její symetrii mohla vyplnit dvěma způsoby	82
5.3	Enneperova plocha s řídicí sítí	82
5.4	Enneperova plocha pro parametry $s, t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$	83
5.5	Enneperova plocha pro parametry $s, t \in [-2, 5; 2, 5]$	83
5.6	Hyperbolický paraboloid	84
5.7	B-spline plocha	89
5.8	B-spline plocha	90
6.1	Metoda sítě	97
6.2	Očíslování sítě	98
6.3	Výsledná síť metodou sítě	99
6.4	Výsledná síť pro nevhodně zvolené vstupní podmínky	99
6.5	Výsledná síť pro různé podíly	100
6.6	Graf uzlů a spojnic	102
6.7	Očíslování sítě	105
6.8	Výsledná síť metodou hustoty síly	106
6.9	Výsledná síť pro nevhodně zvolené vstupní podmínky	106
6.10	Očíslování sítě - fixované čtyři body	107
6.11	Výsledná síť metodou hustoty síly - fixované čtyři body	108
6.12	Složky tenzoru napětí	109
6.13	Síly ve vrcholech trojúhelníkového prvku	110
6.14	Vnitřní síla v bodě C	111
6.15	Celkové vnitřní síly v bodě C	112
6.16	Trojúhelníková síť	114
6.17	Počáteční stav	114
6.18	Konečný stav	115
6.19	Počáteční stav	115
6.20	Konečný stav	115
6.21	Programovací schéma metody hustoty plošného napětí	116
6.22	Programovací schéma metody aktualizovaných referenčních konfigurací	120

6.23	Programovací schéma modifikované metody aktualizovaných referenčních konfigurací	122
6.24	Ukázka konvergence k minimální ploše	124
6.25	Isogeometrické B-spline prvky druhého stupně	124
6.26	Isogeometrické NURBS prvky druhého stupně	126

Seznam tabulek

2.1	Fyzikální vlastnosti vláken různých materiálů	9
4.1	B-spline bazové funkce	48
4.2	NURBS bazové funkce	49
4.3	Postupný výpočet bodů řídicího polygonu v důsledku vkládání uzlů .	69
4.4	Postupný výpočet bodů řídicího polygonu v důsledku zvyšování stupně	70
5.1	Řídicí síť Enneperovy plochy	81
5.2	Řídicí body pro zborcený čtyřúhelník	81
5.3	Řídicí síť (hranice)	90
5.4	Řídicí síť (po výpočtu)	90
5.5	Řídicí síť (po výpočtu) - ukotvená B-spline, uzlové vektory U_1, V_1 . .	92
5.6	Řídicí síť (po výpočtu) - ukotvená B-spline, uzlové vektory U_2, V_2 . .	93
5.7	Řídicí síť (po výpočtu) - pevně zadané 3 krajní sloupce a řádky . . .	94
6.1	Matice uzlů a spojnic	102

Seznam použitého značení

\mathbf{X}	vektorová funkce parametrizující plochu
$\boldsymbol{\theta}(\theta_1, \theta_2)$	křivočaré souřadnice bodu na ploše
$\mathbf{X}_{,i}$	parciální derivace \mathbf{X} podle i té proměnné
$T_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{X}$	tečný podprostor
\mathbb{R}^n	n dimenzionální reálný prostor
$\mathcal{L}_p(\omega, \mathbb{R}^3)$	prostor měřitelných funkcí na ω
$L_p(\omega, \mathbb{R}^3)$	faktorový prostor prostoru \mathcal{L}_p
$W_p^k(\omega, \mathbb{R}^3)$	Sobolevův prostor
$W_{p,0}^k(\omega, \mathbb{R}^3)$	Sobolevův prostor s kompaktním nosičem
ω	oblast v \mathbf{R}^2
$\partial\omega$	hranice ω v \mathbf{R}^2
$\bar{\omega}$	uzávěr ω v \mathbf{R}^2
$C^n(\omega, \mathbb{R}^3)$	prostor spojitých a spojitě diferencovatelných funkcí až do řádu n zobrazujících ω do \mathbb{R}^3
$C_0^\infty(\omega, \mathbb{R}^3)$	prostor spojitých nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem
$C^{1,\alpha}(\omega, \mathbb{R}^3)$	Hölderův prostor
(a, b)	otevřený interval
$[a, b]$	uzavřený interval
$\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$	koeficienty první základní formy plochy
g_{ij} , resp. G_{ij}	koeficienty první základní formy plochy
$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$	koeficienty druhé základní formy plochy
b_{ij}	koeficienty druhé základní formy plochy
$\boldsymbol{\nu}$	vektorové pole vnějších jednotkových normál plochy
\mathcal{H}	střední křivost
$A_\omega(\mathbf{X}), A(\mathbf{X})$	plošný funkcionál \mathbf{X} přes oblast ω
$D_\omega(\mathbf{X}), D(\mathbf{X})$	Dirichletův funkcionál \mathbf{X} přes oblast ω
Γ	Jordanova křivka
$\mathcal{C}(\Gamma)$	třída funkcí, které mají společnou křivku Γ
$\mathcal{C}^*(\Gamma)$	třída funkcí, které mají společnou křivku Γ a tři různé pevné body

\mathcal{P}	sít/polygon řídicích bodů
\mathbf{P}_{ij}	řídicí bod
\mathbf{E}	uzlový vektor
$B_i^n(\theta)$	Bernsteinův polynom stupně n proměnné θ
$N_i^n(\theta)$	B-spline báze funkce stupně n proměnné θ
$R_i^n(\theta)$	NURBS báze funkce stupně n proměnné θ
span	lineární obal
max	maximum
min	minimum
inf	infimum
lim	limita
LIN	lineární aproximace
\cdot	skalární součin vektorů
\times	vektorový součin
\times	Kartézský součin
$\ \cdot\ $	velikost vektoru
Δ	Laplaceův operátor
∇	gradient
\otimes	tenzorový součin
$:$	dvoutečkový součin tenzorů
\circ	operace skládání zobrazení
CAD	computer aided design (počítačové modelování)
ETFE	ethylentetrafluorethylen
PTFE	polytetrafluorethylen
PET	polyethylen
PVC	polyvinylchlorid
UVA, UVB, UVC	druhy ultrafialového záření
NURBS	neuniformní racionální B-spline
MKP	metoda konečných prvků
IA	isogeometrická analýza

Úvod

Membránové konstrukce se stále více uplatňují v moderní architektuře a jsou tématem i této disertační práce. Vzhledem ke komplikovanosti jejich celkové konstrukce je to velmi obsáhlé téma. Fyzikální vlastnosti (a potažmo geometrické) jsou ovlivněny použitými materiály membrány, úchyty nebo kotvením.

Komplexní návržení membránové konstrukce je komplikované a probíhá v několika krocích. Primární metodou v navrhování membránových konstrukcí byly až do roku 1969 fyzické modely. Realizace složitějších struktur zabrala mnohdy i několik let. Přelomem bylo zavěšené zastřešení mnichovského stadionu, vybudovaného pro letní Olympijské hry v roce 1972, na jehož návrhu se podílel i Frei Otto. Jeho rozsáhlá a často citovaná práce, [18], popisující metody fyzického modelování za použití různých materiálů (mýdlové bubliny, tkaniny, lana) a doplněná o řadu fotografií i fyzikálních souvislostí je posunem směrem k matematickému modelování membránových konstrukcí. Nejjednodušší fyzické modely vznikají ponořováním drátku do mýdlové vody. Zpevněná (nikoliv pevná) hranice, která představuje budoucí lano, se nahrazuje např. nitkou. Podrobněji o této analogii v oddílu 3.2.

Prvním krokem k vytvoření membránové konstrukce je společná představa architekta a investora. Architekt podle požadavků, např. na velikost plochy, která má být zastřešena, světlou výšku, materiál (ovlivňuje i světelnou a tepelnou propustnost) nebo umístění navrhované konstrukce (geologické údaje mohou omezovat umístění kotvení a stožárů), naskicuje trojrozměrný návrh, který zahrnuje veškeré topologické údaje včetně umístění lan, stožárů i kotvení.

V dalším kroku se z trojrozměrného návrhu vytvoří **konstrukční model**. V minulosti se vytvořil fyzický model v daném měřítku. V současnosti se na základě fyzikálního popisu budoucí struktury vybere vhodný matematický model, který se vytváří virtuálně pomocí CAD¹ systémů jako je např. AutoCAD, Rhinoceros, IDEAS, ForTen a mnoho dalších. Většina modelů pracuje s diskretizací skutečného stavu konečnými prvky. Jednotlivé prvky vytvořené diskretizace se doplní o kvantitativní hodnoty (materiál, předpětí, zatížení atd.). Konstrukční model ovlivňuje téměř všechny následující kroky a vyžaduje dobré inženýrské znalosti.

Poté se v závislosti na předpokládaném zatížení nebo předpětí a s ohledem na za-

¹Z anglického *computer aided design*, které lze volně přeložit jako počítačové modelování.

dané okrajové podmínky hledá **počáteční rovnovážný stav**² membrány. Některé *rovnovážné metody* jsou podrobněji popsány v kapitole 6. Při následné **analýze** rovnovážného stavu probíhá množství výpočtů, které ověří, zda navržená konstrukce splňuje příslušné stavebně-konstrukční požadavky. Zjišťuje se například chování konstrukce při zatížení sněhem nebo ve větru.

Geometrický tvar navržené membrány obecně není rozvinutelná nebo po částech rozvinutelná plocha a je nutné vytvořit **stříhový plán**³ pro rovinné díly membrány. Jednotlivé stříhové díly se sešívají nebo svařují. Protože používané materiály se vyrábějí v rolích, je omezujícím prvkem pro stříhový plán šířka role, tedy šířka stříhových dílů. Pokud se jedná o tkaný materiál, je dalším omezujícím faktorem směr osnovy. Protože se stříhový vzor generuje z rovnovážného stavu a je náchylný ke zkrabacení (vlivem tepla, sněhu apod.), tvary dílů se v závěrečné fázi kompenzují v závislosti na uvažovaném předpětí. Tento vstupní údaj o použitém materiálu se měří na dvouosém testovacím přístroji, který byl navržený P. D. Goslingem na Universitě v Newcastlu ve Velké Británii. Vzhledem k úspoře materiálu jsou také upřednostňovány co nejrovnější strany dílů. Na uspokojení těchto a mnoha dalších doplňujících kritérií se podílejí další různé optimalizační numerické metody. I když se vyvíjejí stále modernější materiály, které dovolují větší volnost tvarů, nemusí být tato fáze celého procesu úspěšná a je někdy nutné přehodnotit prvotní návrh, vstupní hodnoty i přepočítat počáteční rovnovážný stav membrány pro jiné hodnoty.

Pro předloženou práci je stěžejním tématem zjištění počátečního rovnovážného stavu membrány. Jedním z prvotních cílů je přehled současných numerických metod v této oblasti a pro vybrané z nich navrhnout příklad, který by dovoľoval jejich porovnání. Dalším záměrem je matematicky korektně zformulovat úlohu hledání počátečního rovnovážného stavu, zmapovat podmínky pro existenci a případnou jednoznačnost řešení, a navrhnout vlastní postup řešení pomocí isogeometrické analýzy, která je určitým zobecněním metody konečných prvků (MKP). Protože zobrazovací počítačové systémy využívají neuniformní racionální B-spline (NURBS) reprezentace ploch, je snahou nahradit standardní konečné prvky prvky na základě NURBS bazových funkcí, abychom konečný výsledek nemuseli transformovat z konečných prvků do NURBS reprezentace. Dalším důvodem je i časové hledisko. Standardními konečnými prvky získáme výsledný tvar membrány přibližně pomocí velkého množství uzlů, které ovlivňují tvar plochy. Generování takové sítě spotřebuje mnohem více času než samotný výpočet. Editace a následná úprava pomocí zobrazovacího softwaru je tedy náročná. NURBS konečné prvky mají lepší spojitost a mnohem menší počet řídicích bodů ovlivňujících tvar plochy.

²Volný překlad z anlického *form finding*.

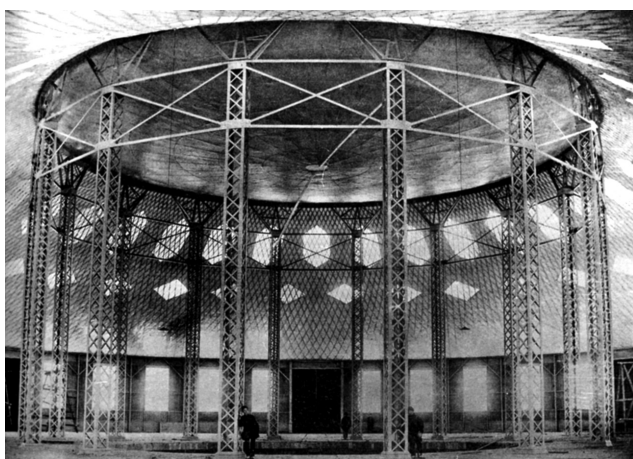
³V angličtině se používají pro tuto fázi výrazy *production plan* nebo *cutting pattern*.

Kapitola 1

Historie a současnost membránových konstrukcí

1.1 Historie membránových konstrukcí

Textilní konstrukce existovaly již před dvěma tisíci lety. Tehdy se využívaly stany a různé přístřešky. I dnes se můžeme setkat s cirkusovými nebo vojenskými stany či jurtami pastevců. Nejedná se o membránové konstrukce v dnešním slova smyslu. Většina z nás jistě někdy stavěla stan. Přes konstrukci se přehodí plachta, která se poté napne a ukotví. V typických plachtových konstrukcích je však plachta aktivní prvek. Dobře navržená plachta by se neměla vrásnit, případný vítr ji nesmí vzdouvat.



(a) Pavilon



(b) Věž

Obrázek 1.1: Nižní Novgorod, Rusko

Když pomíneme tato jednoduchá obydlí, pak prvním průkopníkem plachtových



Obrázek 1.2: Věž na Šabolovce, Moskva, Rusko



Obrázek 1.3: Sportovní stadion, Tokio, Japonsko

konstrukcí většího rozponu byl pravděpodobně ruský vědec Vladimír Grigorjevič Šuchov (28.8. 1853 - 2.2. 1939). Jeho zájmem byly prutové konstrukce, ale i jiná odvětví vědy (například patentoval přístroj na frakci ropy). Na Všeruské výstavě v Nižném Novgorodu v roce 1896 představil veřejnosti 8 pavilonů na tehdejší dobu působivé velikosti. V jejich centru byla i zavěšená provazová konstrukce pokrytá tenkou membránou, Obr. 1.1(a). Při konstrukci využíval Šuchov svých vědeckých poznatků o prutových konstrukcích, které na stejné výstavě prezentovala vodárenská věž ve tvaru rotačního zborčeného hyperboloidu, Obr. 1.1(b). Příkladem takové prutové konstrukce (která je stále funkční) je 160m vysoká věž z roku 1922 nesoucí televizní a rádiový vysílač, Obr. 1.2. Věž je sestavena ze šesti na sebe posazených segmentů zborčených jednodílných hyperboloidů, původně měla být vysoká 350m a v roce 2007 proběhla její rekonstrukce.

O několik desítek let mladší je plavecký stadion navržený Kenzou Tangem v japonském Tokiu pro letní Olympijské hry v roce 1964. Zastřešení tvoří zavěšená membránová konstrukce na středovém železobetonovém nosníku, Obr. 1.3.

Přehlídkou moderní a odvážné architektury jsou bezpochyby světové výstavy Expo. Pavilon západního Německa na Expo '67, Obr. 1.4, v kanadském Montrealu je dílem architekta Freie Otta, který svým talentem hojně rozvíjel teorii a hlavně praxi plachtových konstrukcí. Na Expu '86, které se konalo v kanadském Vancouveru je zajímavý právě kanadský pavilon, Obr. 1.5.

1.2 Membránové konstrukce současnosti

Mezi současné plachtové konstrukce zcela jistě patří hala mezinárodního letiště v Denveru, USA, nebo širokorozponová konstrukce Millenium Dome v Londýně ve Velké Británii. Denverské letiště bylo uvedeno do provozu v roce 1995. Jeho plachtové



Obrázek 1.4: Expo '67, Montreal, Kanada



Obrázek 1.5: Canada Place, Vancouver, Kanada



Obrázek 1.6: Letiště, Denver, USA



Obrázek 1.7: Millenium Dome, Londýn, Velká Británie

zastřešení haly představuje nedaleké Skalisté hory, Obr. 1.6. Sněhová vánice v roce 2006, která ochromila dopravu na letišti, měla i negativní dopad na tuto konstrukci a v bílém plášti střechy vytvořila trhlinu.

Millenium dome, jak již název napovídá, byla dokončena v roce 1999, je největší kopulí na světě, a protože symbolizuje čas, její průměr je 365m, jako je dní v roce, Obr. 1.7.

Plachty se ale používají i u staveb menších rozměrů, než je zmiňovaný Millenium Dome. Používají se různé druhy stanů a přístřešků. Např. Obr. 1.8 nebo Obr. 1.9 jsou navrženy americkou firmou Span Systems.

I v Praze se můžeme setkat s plachtovými konstrukcemi: plachta zastiňující vchod do budovy rádia Svobodná Evropa, zastřešení tramvajové zastávky K Barrandovu nebo přístřešky na prostranství u zastávky metra Chodov.



Obrázek 1.8: Divadlo, Budapešť, Maďarsko



Obrázek 1.9: Dubai, Spojené arabské emiráty

Kapitola 2

Využití a vlastnosti membránových konstrukcí

O membránách se píše, vedle dřeva, skla, betonu a hlíny, jako o pátém stavebním materiálu. Mezi architekty získávají stále větší oblibu. Zajímavé tvary, barevnost a lehkost celé struktury působí téměř vždy velice nevšedním dojmem. Při pohledu na obrázky uvedené výše je asi nejvýznamnější *estetická hodnota* těchto konstrukcí. Až pak hledíme na jejich užitnou hodnotu. Ale ani ta nebývá malá. Samozřejmě funkční hodnota je závislá od kvality membrány i jejího ukotvení.

Membránové konstrukce se nejčastěji využívají jako zastřešení, která mají chránit před deštěm, slunce či větrem. Zastřešují se jimi sportovní stadiony, jeviště. Často jsou to konstrukce, které *se přemísťují* z místa na místo, mají menší náklady na transport, protože jsou *lehké*, a dají se postavit takřka kdekoliv.

Membrány se dají využít tam, kde potřebujeme *velký rozpon*. Mají poměrně malou *plošnou hmotnost* ($175\text{--}3000\text{g/m}^2$, [10]) a tím menší nároky na podpůrnou konstrukci, ale zároveň jsou i *pevné* - $1\text{--}13\text{kN}/5\text{cm}$, [10]. Únosnost je ale dána i tvarem zakřivení navrhované membrány a jejím počátečním předpětím.

Do vlastností membránového zastřešení velkou měrou přispívá použitý materiál. Membrána může být z tkané textilie (potahovaná nebo nepotahovaná plachta) i folie (např. ethylentetrafluorethylen = ETFE). Plachty bez povrchové úpravy se vyrábějí např. z bavlny, polytetrafluorethylenu (PTFE), aramidových vláken (aromatický polyamid), polyethylenu (PET) nebo skelných vláken. Potažením základní tkaniny lze výrazně prodloužit její životnost (odolnost proti ultrafialovému (UV) záření, vodo-odpudivost, odolnost proti přilnavosti znečištění apod.), ale i zlepšit její materiálové vlastnosti. Bavlněné látky se impregnují a mají poměrně omezenou životnost a např. PET tkaniny se potahují polyvinylchloridem (PVC) a lakují akrylovým nebo polyvinylidenfluoridovým (PDF) lakem. ETFE folie dobře nahrazují sklo (např. botanické zahrady, plavecké stadiony), jsou mnohem lehčí (a podpůrná konstrukce je tedy levnější), propouštějí UVA a zachycují UVB a UVC záření a jsou i odolnější (např. proti



Obrázek 2.1: Zahrada Eden Cornwall, Velká Británie

kroupám). Nejčastěji se používají ve tvaru polštářů. Jako příklad uvedme zastřešení zahrady Eden ve Velké Británii, kde váha pláště z ETFE polštářů představuje 1% váhy skla podle konkurenčního návrhu zastřešení, Obr. 2.1. Pro zajímavost uvedme Tab. 2.1 orientačních (výsledky se mohou lišit podle výrobců) fyzikálních vlastností vláken různých materiálů.

Vlastnost	Sklo (E-HTS)	Aramid (Kevlar 49)	Ocel (Tažená za studena)
Hustota (g/cm^3)	2.55	1.44	7.86
Youngův modul (GPa)	69	124	205
Pevnost v tahu (MPa)	2410	2760	1570
Maximální prodloužení (%)	3.5	2.5	4.0
Teplotní odolnost ($^{\circ}\text{C}$)	350	250	500

Tabulka 2.1: Fyzikální vlastnosti vláken různých materiálů

Jak již bylo řečeno v úvodu, u membránových konstrukcí se nejedná o obalení nosné konstrukce membránou. Konstrukce i membrána tvoří celek a samotná membrána je předepjatá a má své funkční vlastnosti. Membrány jsou navrhovány tak, aby co nejlépe přenášely tahové síly do okrajových lan a dále do nosné konstrukce. Přenos těchto sil komplikuje jiná pevnost v osnově a v útku. Záleží tedy na směru vláken při šití, resp. svařování, výsledné plachtoviny. I to se samozřejmě stále vylepšuje. Za všechny bych uvedla např. francouzského výrobce Ferrari, který dosahuje na plachtovinách téměř identických pevností v obou směrech. Jednovrstvé membrány mají omezené tepelně-izolační schopnosti. Vícevrstvou membránovou konstrukcí z nafukovacích polštářů ale můžeme docílit tepelně-izolačních schopností srovnatelných se

sklem, [10]. Hořlavost je zase výhradně závislá na použitém materiálu (např. jiné vlastnosti má bavlna a jiné skelná vlákna potažená silikonem). Žádná ale neodkapává ve formě hořících částic.

Kapitola 3

Formulace úlohy

V této kapitole nejprve zavedeme potřebné pojmy z diferenciální geometrie, které jsou využívány i v kapitolách následujících. Pokud není řečeno jinak, používáme Einsteinovo sumační pravidlo (sčítáme přes opakující se indexy). Poté se zaměříme na dva významné směry v modelování membránových konstrukcí - jedním je podobnost membrány a minimální plochy a druhým je modelování počátečního rovnovážného stavu membrány.

Pro minimální plochu odvodíme její rovnici z pohledu fyziky i matematiky. Pokud na takovou plochu prší, voda z každého místa plochy odtéká. Problémem ale může být sněhová pokrývka, která svojí hmotností deformuje membránu, znehodnocuje její dobré geometrické vlastnosti, a při odtávání sněhu mohou vznikat jezírka a v extrémním případě porušení membrány. Jako příklad můžeme uvést zastřešení tramvajové zastávky na trase Hlubočepy - Barrandov, přesněji zastávka K Barrandovu, Obr. 3.1, která měla již v minulosti problémy se sněhovou pokrývkou. Nebo zastřešení denverského mezinárodního letiště, Obr. 1.6, které se v roce 2003 protrhlo pod tíhou sněhu. Membrány se proto předpínají, aby možné zatížení sněhu vyrovnaly. Míra předpětí se vypočítá pro klimatické podmínky v dané oblasti. A tím se od minimální plochy liší, protože minimální plocha představuje z mechanického hlediska membránovou konstrukci nulové hmotnosti bez předpětí. Není proto ani vhodná pro modelování membránových konstrukcí velkých rozponů, protože tam je již třeba uvažovat i hmotnost membrány. Tím se dostáváme ke druhé skupině modelů.

3.1 Diferenciální geometrie ploch

Tato kapitola i kapitoly následující se opírají o pojmy z diferenciální geometrie. Pro přehlednost a jednoznačnost pojmů uveďme definice, předpoklady a úmluvy, za kterých jsou použity.

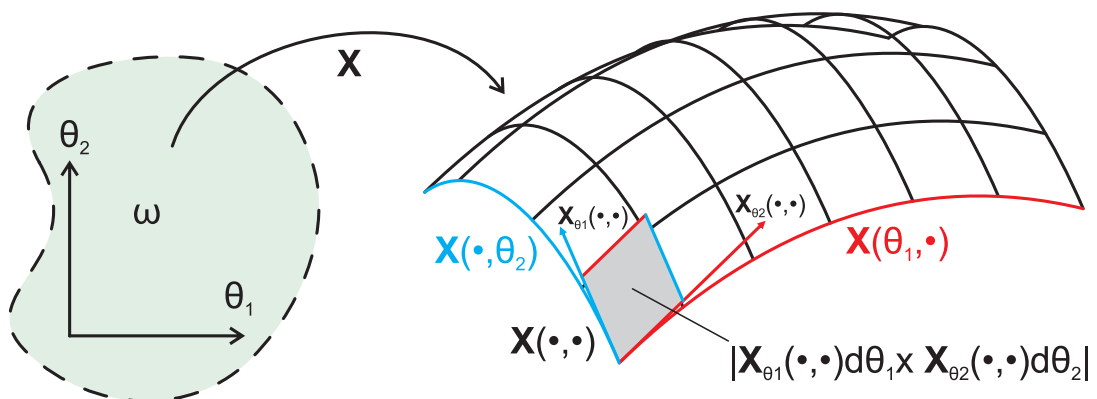


Obrázek 3.1: Tramvajová zastávka K Barrandovu, Praha

Definice 3.1 Množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, pro kterou existuje vektorová funkce \mathbf{X} dvou reálných proměnných θ_1, θ_2 , s definičním oborem ω taková, že:

- $\omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast a \mathbf{X} zobrazuje ω homeomorfně (spojitě a ryze monotónně) na Ω ,
- \mathbf{X} je třídy C^n , $n \geq 1$,
- vektory $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{\theta})$, $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2}(\boldsymbol{\theta})$ jsou lineárně nezávislé v každém bodě $(\theta_1, \theta_2) \in \omega$,

nazýváme regulární plochu třídy C^n . O vektorové funkci říkáme, že určuje plochu Ω .



Obrázek 3.2: Plošný integrál

Poznámka:

1. I když obecně připouštíme, aby $\omega \equiv \mathbb{R}^2$, v dalším textu pracujeme převážně s omezenými oblastmi ω .
2. Homeomorfismus ω na Ω je příliš omezující podmínka a v některých případech ji zeslabíme.
3. Parciální derivace $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_\alpha}(\boldsymbol{\theta})$ podle proměnných píšeme také ve tvaru $\mathbf{X}_{\theta_\alpha}(\boldsymbol{\theta})$ nebo ještě stručněji $\mathbf{X}_{,\alpha}(\boldsymbol{\theta})$, kde dolní index značí proměnnou, podle které derivujeme (eventuální vyšší počet proměnných nebo číselných hodnot za čárkou v tomto dolním indexu pak řád derivace a pořadí proměnných zleva doprava pořadí derivování).

◁

Definice 3.2 *Tečný podprostor $T_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{X}$ v regulárním bodě $\boldsymbol{\theta}$ plochy \mathbf{X} prostoru \mathbb{R}^3 je lineární obal vektorů parciálních derivací $\mathbf{X}_{\theta_1}(\boldsymbol{\theta})$ a $\mathbf{X}_{\theta_2}(\boldsymbol{\theta})$.*

Obsah velmi malé části plochy se liší jen málo od obsahu rovnoběžníku, jehož strany jsou tečné vektory v pevném bodě plochy vynásobené změnou parametru. Obsah rovnoběžníku spočteme jako velikost vektoru vektorového součinu vektorů jeho stran, Obr. 3.2.

Definice 3.3 *Obsah $A_\omega\mathbf{X}$ povrchu plochy X definujeme jako:*

$$A_\omega(\mathbf{X}) = \int_\omega \|\mathbf{X}_{\theta_1}(\boldsymbol{\theta}) \times \mathbf{X}_{\theta_2}(\boldsymbol{\theta})\| d\theta_1 d\theta_2. \quad (3.1)$$

Poznámka: Určí-li dvě vektorové funkce tutěž plochu Ω stejné třídy, pak existuje vzájemně jednoznačné diferencovatelné zobrazení mezi jejich definičními obory, které je také stejné třídy. Existuje tedy celá třída vektorových funkcí, které určují stejnou plochu Ω v prostoru. Jako příklad můžeme uvést kulovou plochu a její různé parametrizace, které jsou všeobecně známé. Zde nastává problém s jednoznačností při formulaci úlohy, protože funkcionál vyjadřující obsah plochy, aby byl dobře definovaný, nezávisí na volbě parametrizace. ◁

Definice 3.4 *Nechť $\mathbf{X} : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ je regulární plocha třídy C^2 se sférickým obrazem¹ $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta}) : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ definovaným jako*

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\mathcal{W}(\boldsymbol{\theta})} \mathbf{X}_{\theta_1} \times \mathbf{X}_{\theta_2},$$

¹ $\boldsymbol{\nu}$ je jednotkové vektorové pole.

$$\begin{aligned}
\text{kde } \mathcal{W}(\boldsymbol{\theta}) &= \sqrt{\mathcal{E}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) - \mathcal{F}^2(\boldsymbol{\theta})} = \sqrt{G_{11}(\boldsymbol{\theta})G_{22}(\boldsymbol{\theta}) - G_{12}^2(\boldsymbol{\theta})}, \\
G_{11}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathcal{E}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{X}_{\theta_1}, & G_{22}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{X}_{\theta_2}, \\
G_{12}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{X}_{\theta_2}.
\end{aligned}$$

Funkce $G_{ij}(\boldsymbol{\theta})$, $i, j \in \{1, 2\}$, resp. $\mathcal{E}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$ značí koeficienty první základní formy plochy. Koeficienty druhé základní formy plochy pak označíme

$$\begin{aligned}
B_{11}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{X}_{\theta_1\theta_1}, & B_{22}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{X}_{\theta_2\theta_2}, \\
B_{12}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathcal{M}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{X}_{\theta_1\theta_2}.
\end{aligned}$$

Pokud nehrozí nedorozumění, závislost na proměnné $\boldsymbol{\theta}$ vynecháváme.

Definice 3.5 Střední křivost \mathcal{H} je aritmetický průměr normálových křivostí v kolmých směrech z tečného podprostoru.

Poznámka: Lze ukázat, že střední křivost nezávisí na výběru dvojice kolmých směrů. Výpočtem střední křivosti z hlavních směrů (pokud bod není kruhový, jsou v nich křivosti extrémní) odvodíme vzorec pro střední křivost \mathcal{H} , např. v [7], kap. 1.2 :

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{G}\mathcal{L} + \mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)}.$$

◁

3.2 Minimální plocha

V počátcích navrhování membránových konstrukcí se hojně využívala analogie membrány a minimální plochy. Odvození konkrétní parametrizace minimální plochy není triviální matematická úloha, jak uvidíme dále v tomto oddílu. Zjednodušeně řečeno: Pro danou uzavřenou prostorovou křivku hledáme plochu, která ji obsahuje a která má minimální povrch. Naproti tomu se tato plocha jednoduše fyzicky modeluje např. mýdlovou bublinou, protože mýdlová bublina zaujme mezi všemi různými plochami pro dané okrajové podmínky takový tvar, který má, jak název ploch napovídá, minimální plošný obsah. To hraje důležitou roli např. ve spotřebě použitého materiálu k výrobě membrány. Mýdlové bubliny využíval i Frei Otto pro své modely tehdy „jen“ plachtových a lanových konstrukcí. Jejich fotografie lze nalézt např. v [18]. Ze zkoumání modelů pak Otto odvozoval fyzikální vlastnosti těchto konstrukcí.

Ze známých minimálních ploch můžeme jmenovat *katenuoid*, který vznikne rotací řetězovky a je jedinou rotační minimální plochou. Podobným unikátem mezi přímkovými plochami je i *helikoid*, pokud neuvažujeme triviální případ - rovinu. Obrázky některých minimálních ploch najdeme v kapitole 5. Tento oddíl se ale spíše zaměřuje na vymezení obecných vlastností minimálních ploch důležitých pro modelování membránových konstrukcí než výčet již známých minimálních ploch.

3.2.1 Plateauův problém

Belgický fyzik J. A. F. Plateau se zabýval v 19. století zkoumáním kapilarity a povrchového napětí. Minimální plochu přirovnal k mýdlové bublině. Pokud zachováme mýdlovou bublinu v klidu, její plocha odpovídá kulové ploše. Foukneme-li do ní, deformuje se (vyrovnává tím rozdíly tlaků na obou stranách membrány) a v krajním případě, pokud tlak přesáhne únosnou mez, bublina praskne. Podobně vytvarujeme-li z drátku uzavřenou křivku a ponoříme-li ho do mýdlové vody, po jeho vytáhnutí se zformuje plocha (pokud mýdlová membrána nepraskne), která je z fyzikálního hlediska v rovnováze a můžeme tedy usuzovat, že existuje minimální plocha pro danou hranici. Z matematického hlediska nemá takový pokus žádnou výpovědní hodnotu. Je potřeba zformulovat vstupní údaje, které matematicky popisují zadanou hranici (tvarovaný drátek) a definovat podmínky, které splňuje výsledná minimální plocha. Problém byl formulován již dříve italským matematikem J. L. Lagrangem a francouzským matematikem J. B. Meusnierem a zabývá se hledáním plochy s nejmenším plošným obsahem pro danou uzavřenou hranici. V 19. století byl tento problém řešen pro různé typy hraničních křivek. Dostatečně obecné řešení uvedli v roce 1930 současně americký matematik J. Douglas a maďarský matematik T. Radó, i když jejich přístupy k důkazu byly odlišné.

Problém 1 (*Plateauův problém*) *Mějme uzavřenou Jordanovu křivku $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ (jednoduchou prostorovou křivku homeomorfní s kružnicí) a množinu ploch, které jsou homeomorfní s otevřeným kruhem, mají konečný povrch a jejich hranicí je Γ . Hledejme mezi těmito plochami takovou, která má nejmenší povrch.*

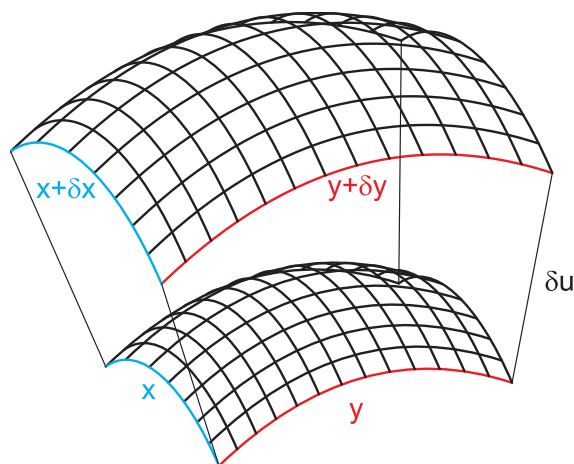
Později tuto formulaci ještě upravíme, protože je příliš restriktivní.

3.2.2 Fyzikální vlastnosti minimální plochy

Vezměme malou část plochy mýdlové membrány, která se zvětšila díky rostoucímu tlaku, Obr. 3.3. Díky velikosti uvažované plochy, můžeme považovat křivky na hranici za části kružnice. Spočtíme, jakou vykoná práci W zvětšující se plocha. Velikost povrchu této části plochy označme A . Plocha je ohraničená křivočarým pravouhelníkem se stranami x a y .

Množství práce vykonané při zvětšování povrchu je stejné jako povrchové napětí σ vynásobené změnou velikosti povrchu ΔA . Dále požadujeme, aby se křivky hran setkávaly pod pravým úhlem (tedy $A \approx xy$). Přírůstek velikosti povrchu plochy je dán přibližně výrazem:

$$\Delta A = (x + \delta x)(y + \delta y) - xy$$



Obrázek 3.3: Zvětšující se povrch plochy

Délka x je délka části kružnice o poloměru R_1 a $x + \delta x$ je délka oblouku o poloměru $R_1 + \delta u$ se stejným středovým úhlem. Odtud máme rovnost:

$$\frac{x + \delta x}{R_1 + \delta u} = \frac{x}{R_1}$$

Pokud provedeme totéž pro y , dostáváme:

$$x + \delta x = x \left(1 + \frac{\delta u}{R_1} \right)$$

$$y + \delta y = y \left(1 + \frac{\delta u}{R_2} \right)$$

A upravíme rovnici pro ΔA :

$$\Delta A = x \left(1 + \frac{\delta u}{R_1} \right) y \left(1 + \frac{\delta u}{R_2} \right) - xy = xy \delta u \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + xy \frac{(\delta u)^2}{R_1 R_2}$$

Pokud je δu velmi malé, můžeme poslední výraz v předchozí rovnici vynechat, a zbytek dosadit za ΔA do rovnice $W = \sigma \Delta A$. Získáme tak Laplaceovu-Youngovu rovnici (3.2) (která byla objevena kolem roku 1800 T. Youngem a P. S. Laplaccem) pro plochy dané explicitní rovnicí:

$$p xy \delta u = \sigma xy \delta u \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.2)$$

Rovnice říká, že rozdíl tlaků $p = p_1 - p_2$ na každé straně bubliny nebo membrány je daný součinem povrchového napětí σ a veličiny, která souvisí s tvarem membrány. Těmi jsou veličiny $1/R_1$ a $1/R_2$ - normálové křivosti plochy v daných směrech (s odvoláním na počáteční požadavek, aby se hrany setkávaly pod pravým úhlem). Další veličina - střední křivost (její dvojnásobek) je $2\mathcal{H} = 1/R_1 + 1/R_2$. Podrobnější odvození této rovnice můžeme najít v [9].

Pokud jsou tlaky na obou stranách membrány vyrovnané, pak je $2\mathcal{H} = 0$.

3.2.3 Minimální plocha zadaná explicitně

Od předminulého století se název minimální plocha používal pro plochy s nulovou střední křivostí. To dokázal již v roce 1760 J. L. Lagrange pro plochy dané explicitní rovnicí. V roce 1776 J. B. Meusnier použil při svém důkazu analytické vyjádření střední křivosti a určil dvě minimální plochy - katenoid a helikoid.

Demonstrujme nyní nutnou podmínku nulové střední křivosti pro to, aby daná plocha byla minimální.

Předpokládejme nyní, že $\mathbf{X}(\omega) = M$ je minimální plocha, která je částí grafu funkce (pokud by pro nějaký bod $\mathbf{m} \in M$ existovaly $\boldsymbol{\theta}, \bar{\boldsymbol{\theta}} \in \omega$, $\boldsymbol{\theta} \neq \bar{\boldsymbol{\theta}}$ takové, že $\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$, stačí vzít podmnožiny ω , tak aby na nich plocha byla grafem funkce). Necht' má plocha na hranici předepsanou křivku $\mathbf{X}(\partial\omega) = \mathbf{k}$. Uvažujme množinu ploch $M^t : \mathbf{X}^t(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2, f(\theta_1, \theta_2) + t \cdot g(\theta_1, \theta_2))$, kde g je funkce na oblasti ω , $g(\partial\omega) = 0$ a $t \cdot g(\theta_1, \theta_2)$ vyjadřuje odchylku od M . Pak

$$\|\mathbf{X}_{\theta_1}^t(\theta_1, \theta_2) \times \mathbf{X}_{\theta_2}^t(\theta_1, \theta_2)\| = \sqrt{1 + f_{\theta_1}^2 + f_{\theta_2}^2 + 2t(f_{\theta_1}g_{\theta_1} + f_{\theta_2}g_{\theta_2}) + t^2(g_{\theta_1}^2 + g_{\theta_2}^2)},$$

$$A_\omega(\mathbf{X}(\cdot, t)) = \int_\omega \sqrt{1 + f_{\theta_1}^2 + f_{\theta_2}^2 + 2t(f_{\theta_1}g_{\theta_1} + f_{\theta_2}g_{\theta_2}) + t^2(g_{\theta_1}^2 + g_{\theta_2}^2)} d\theta_1 d\theta_2.$$

Protože je M minimální plocha, $A_\omega(\mathbf{X}(\cdot, t))$ nabývá minima pro $t = 0$, tedy

$$\left. \frac{d}{dt} A_\omega(\mathbf{X}(\cdot, t)) \right|_{t=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} A_\omega(\mathbf{X}(\cdot, t)) = \int_\omega \frac{(f_u g_u + f_v g_v) + t(g_{\theta_1}^2 + g_{\theta_2}^2)}{\sqrt{1 + f_{\theta_1}^2 + f_{\theta_2}^2 + 2t(f_{\theta_1}g_{\theta_1} + f_{\theta_2}g_{\theta_2}) + t^2(g_{\theta_1}^2 + g_{\theta_2}^2)}} d\theta_1 d\theta_2,$$

$$\left. \frac{d}{dt} A_\omega(\mathbf{X}(\cdot, t)) \right|_{t=0} = \int_\omega \frac{f_{\theta_1} g_{\theta_1} + f_{\theta_2} g_{\theta_2}}{\sqrt{1 + f_{\theta_1}^2 + f_{\theta_2}^2}} d\theta_1 d\theta_2.$$

Pokud označíme

$$P = \frac{f_{\theta_1} g}{\sqrt{1 + f_{\theta_1}^2 + f_{\theta_2}^2}} \quad \text{a} \quad Q = \frac{f_{\theta_2} g}{\sqrt{1 + f_{\theta_1}^2 + f_{\theta_2}^2}},$$

a použijeme Greenovu větu, získáme:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\omega} (P d\theta_1 - Q d\theta_2) = \\ & = \int_\omega \left\{ \frac{f_{\theta_1} g_{\theta_1} + f_{\theta_2} g_{\theta_2}}{\sqrt{1 + f_{\theta_1}^2 + f_{\theta_2}^2}} + \frac{g [f_{\theta_1} \theta_1 (1 + f_{\theta_2}^2) + f_{\theta_2} \theta_2 (1 + f_{\theta_1}^2) - 2f_{\theta_1} f_{\theta_2} f_{\theta_1} \theta_2]}{(1 + f_{\theta_1}^2 + f_{\theta_2}^2)^{3/2}} \right\} d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned}$$

Levá strana je nulová, protože $g(\partial\omega) = 0$. První člen na pravé straně je nulový, protože $\left. \frac{d}{dt} A_\omega(\mathbf{X}(\cdot, t)) \right|_{t=0} = 0$. Tedy i druhý člen na pravé straně je nulový. Protože $t = 0$ a rovnost platí pro všechny funkce g splňující požadavky uvedené výše, je

$$f_{\theta_1} \theta_1 (1 + f_{\theta_2}^2) + f_{\theta_2} \theta_2 (1 + f_{\theta_1}^2) - 2f_{\theta_1} f_{\theta_2} f_{\theta_1} \theta_2 = 0. \quad (3.3)$$

3.2.4 Porovnání fyzikálně a matematicky získané podmínky

Navážeme na oddíl 3.2.3 a spočteme střední křivost \mathcal{H} pro plochu $\mathbf{X}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2, f(\theta_1, \theta_2))$ zadanou explicitně:

$$\begin{array}{l} \mathbf{X}_{\theta_1} = (1, 0, f_{\theta_1}) \\ \mathbf{X}_{\theta_2} = (0, 1, f_{\theta_2}) \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{l} \mathbf{X}_{\theta_1 \theta_1} = (0, 0, f_{\theta_1 \theta_1}) \\ \mathbf{X}_{\theta_2 \theta_2} = (0, 0, f_{\theta_2 \theta_2}) \\ \mathbf{X}_{\theta_1 \theta_2} = (0, 0, f_{\theta_1 \theta_2}) \end{array},$$

$$\mathcal{W} = \sqrt{1 + f_{\theta_1}^2 + f_{\theta_2}^2}, \quad \boldsymbol{\nu}(u, v) = \frac{1}{\mathcal{W}} (-f_{\theta_1}, -f_{\theta_2}, 1),$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{E} = 1 + f_{\theta_1}^2 \\ \mathcal{F} = f_{\theta_1} f_{\theta_2} \\ \mathcal{G} = 1 + f_{\theta_2}^2 \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{l} \mathcal{L} = \frac{1}{\mathcal{W}} f_{\theta_1 \theta_1} \\ \mathcal{M} = \frac{1}{\mathcal{W}} f_{\theta_1 \theta_2} \\ \mathcal{N} = \frac{1}{\mathcal{W}} f_{\theta_2 \theta_2} \end{array}.$$

Po dosazení dostáváme

$$\mathcal{H} = \frac{f_{\theta_1} \theta_1 (1 + f_{\theta_2}^2) + f_{\theta_2} \theta_2 (1 + f_{\theta_1}^2) - 2f_{\theta_1} f_{\theta_2} f_{\theta_1} \theta_2}{2\mathcal{W}^2},$$

což odpovídá podmínce (3.3).

3.2.5 Minimální plocha zadaná parametricky

Definice 3.6 Variace plochy² \mathbf{X} je zobrazení $\mathbf{Z} : \bar{\omega} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varepsilon_0 > 0$ třídy C^2 takové, že $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}, 0) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta})$ pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \bar{\omega}$.

Použijeme-li Taylorův rozvoj, můžeme psát $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon \mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon^2 \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon)$, kde $\varepsilon^2 \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon)$ je spojitý zbytek řádu 2.

V každém regulárním bodě plochy je dána lokální soustava souřadná, ve které můžeme psát $\mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta}) = \eta^\alpha(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{X}_{\theta_\alpha}(\boldsymbol{\theta}) + \lambda(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta})$ ³, pro nějaké funkce η^α , λ třídy $C^1(\bar{\omega})$. Pak

$$\mathbf{Z}_{\theta_\alpha} = \mathbf{X}_{\theta_\alpha} + \varepsilon \left[\eta_{\theta_\alpha}^\beta \mathbf{X}_{\theta_\beta} + \eta^\beta \mathbf{X}_{\theta_\alpha \theta_\beta} + \lambda_{\theta_\alpha} \boldsymbol{\nu} + \lambda \boldsymbol{\nu}_{\theta_\alpha} \right] + \varepsilon^2 \mathbf{R}_{\theta_\alpha}.$$

Definice 3.7 První variace plošného funkcionálu $A_\omega(\mathbf{X})$ na ω v \mathbf{X} ve směru vektorového pole $\mathbf{Y} = \eta^i \mathbf{X}_{\theta_i} + \lambda \boldsymbol{\nu}$, kde $\mathbf{Y} \in C_0^\infty(\omega, \mathbb{R}^3)$, je dána předpisem

$$\delta A_\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} A_\omega(\mathbf{Z}(\cdot, \varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0}.$$

Nyní upravíme integrand plošného funkcionálu 3.1 pro funkci \mathbf{Z} a spočteme jeho první variaci podle definice. V důsledku Gaussových⁴ $\mathbf{X}_{\theta_\alpha \theta_\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{X}_{\theta_\gamma} + b_{\alpha\beta} \boldsymbol{\nu}$ a Weintgartenových⁵ $\boldsymbol{\nu}_{\theta_\alpha} = -b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} \mathbf{X}_{\theta_\gamma}$ rovnic dostáváme

$$\mathbf{Z}_{\theta_\alpha} = \mathbf{X}_{\theta_\alpha} + \varepsilon \left[\xi_\alpha^\gamma \mathbf{X}_{\theta_\gamma} + \nu_\alpha \boldsymbol{\nu} \right] + \varepsilon^2 \mathbf{R}_{\theta_\alpha},$$

kde jsme položili

$$\begin{aligned} \xi_\alpha^\gamma &= \eta_{\theta_\alpha}^\gamma + \eta^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} \lambda, \\ \nu_\alpha &= \eta^\beta b_{\alpha\beta} + \lambda_{\theta_\alpha}. \end{aligned}$$

Výrazy obsahující člen ε^2 budeme nadále značit \dots .

Spočteme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Z}_{\theta_1}\|^2 &= \mathcal{E} + 2\varepsilon (\xi_1^1 \mathcal{E} + \xi_1^2 \mathcal{F}) + \dots, \\ \|\mathbf{Z}_{\theta_2}\|^2 &= \mathcal{G} + 2\varepsilon (\xi_2^1 \mathcal{F} + \xi_2^2 \mathcal{G}) + \dots, \\ (\mathbf{Z}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Z}_{\theta_2})^2 &= \mathcal{F} + \varepsilon [\xi_2^1 \mathcal{E} + (\xi_1^1 + \xi_2^2) \mathcal{F} + \xi_1^2 \mathcal{G}] + \dots. \end{aligned}$$

Tedy

$$\|\mathbf{Z}_{\theta_1}\|^2 \|\mathbf{Z}_{\theta_2}\|^2 - (\mathbf{Z}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Z}_{\theta_2})^2 = \mathcal{W}^2 [1 + 2\varepsilon (\xi_1^1 + \xi_2^2) + \dots].$$

²Regulární plocha podle Def. 3.1.

³Sčítáme přes $\alpha \in \{1, 2\}$.

⁴ $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\boldsymbol{\theta})$ jsou Christoffelovy koeficienty, jednoznačně určené funkce.

⁵Matice $(g^{\alpha\beta})$ je inverzní k matici $(g_{\alpha\beta})$.

A navíc

$$\xi_1^1 + \xi_2^2 = \eta_{\theta_1}^1 + \eta_{\theta_2}^2 - \lambda b_{ij} g^{ij} + \Gamma_{ij}^i \eta^j.$$

Protože⁶

$$b_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 2\mathcal{H}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{1}{\mathcal{W}} \mathcal{W}_{\theta_\beta},$$

dostáváme

$$\xi_1^1 + \xi_2^2 = \frac{1}{\mathcal{W}} \left[(\eta^1 \mathcal{W})_{\theta_1} + (\eta^2 \mathcal{W})_{\theta_2} \right] - 2\mathcal{H}\lambda.$$

Na základě toho, že pro $|x| \ll 1$ je $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + O(x^2)$, vidíme, že

$$\sqrt{\|\mathbf{Z}_{\theta_1}\|^2 \|\mathbf{Z}_{\theta_2}\|^2 - (\mathbf{Z}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Z}_{\theta_2})^2} = \mathcal{W} + \varepsilon \left[(\eta^1 \mathcal{W})_{\theta_1} + (\eta^2 \mathcal{W})_{\theta_2} - 2\mathcal{H}\mathcal{W}\lambda \right] + \dots.$$

Dosažením upraveného integrandu dostáváme

$$\delta A_\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int_\omega \left[(\eta^1 \mathcal{W})_{\theta_1} + (\eta^2 \mathcal{W})_{\theta_2} - 2\mathcal{H}\mathcal{W}\lambda \right] d\theta_1 d\theta_2.$$

S použitím Greenovy věty máme

$$\delta A_\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int_{\partial\omega} \mathcal{W} (\eta^1 d\theta_2 - \eta^2 d\theta_1) - 2 \int_\omega \lambda \mathcal{H} \mathcal{W} d\theta_1 d\theta_2.$$

Tedy pro všechna $\mathbf{Y} \in C_0^\infty(\omega, \mathbb{R}^3)$ platí

$$\delta A_\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -2 \int_\omega \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu} \mathcal{H} \mathcal{W} d\theta_1 d\theta_2 = -2 \int \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu} \mathcal{H} dA.$$

Protože $\lambda = \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu}$ je libovolná funkce třídy $C_0^\infty(\omega, \mathbb{R})$, můžeme formulovat následující klíčovou větu.

Věta 3.1 *První variace $\delta A_\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ plošného funkcionálu A_ω v \mathbf{X} ve směru vektorového pole \mathbf{Y} je nulová pro všechna vektorová pole $\mathbf{Y} \in C_0^\infty(\omega, \mathbb{R}^3)$ právě tehdy, když je střední křivost \mathcal{H} plochy \mathbf{X} identicky nulová.*

Poznámka: Jinými slovy: Stacionární bod plošného funkcionálu (a především jeho minima) je právě plocha s nulovou střední křivostí. Proto můžeme regulární plochu $\mathbf{X} : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ třídy C^2 nazvat minimální, pokud $\mathcal{H} = 0$. \triangleleft

Poznámka: Třídou minimálních ploch lze rozšířit i na plochy s izolovanými singularitami. \triangleleft

⁶Lze odvodit výpočtem, např. [7].

3.2.6 Klasická a variační formulace úlohy

Pro klasickou formulaci problému použijeme značení z definice 3.4 a vyjdeme z rovnice

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = 0,$$

kterou upravíme

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{2\mathcal{W}^2} \mathbf{X}_{\theta_2\theta_2} + \frac{\mathcal{G}}{2\mathcal{W}^2} \mathbf{X}_{\theta_1\theta_1} - 2 \frac{\mathcal{F}}{2\mathcal{W}^2} \mathbf{X}_{\theta_1\theta_2} \right) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta}) = 0.$$

Protože pro regulární body plochy je $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta}) \neq \mathbf{0}$, získáme soustavu tří parciálních diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathcal{E}}{2\mathcal{W}^2} \mathbf{X}_{\theta_2\theta_2} + \frac{\mathcal{G}}{2\mathcal{W}^2} \mathbf{X}_{\theta_1\theta_1} - 2 \frac{\mathcal{F}}{2\mathcal{W}^2} \mathbf{X}_{\theta_1\theta_2} = 0,$$

kterou můžeme přepsat v divergentním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1} \left(\frac{\mathcal{G}\mathbf{X}_{\theta_1} - \mathcal{F}\mathbf{X}_{\theta_2}}{\mathcal{W}} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left(\frac{\mathcal{E}\mathbf{X}_{\theta_2} - \mathcal{F}\mathbf{X}_{\theta_1}}{\mathcal{W}} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Problém 2 (Klasická formulace) *Ať je $\omega \in \mathbb{R}^2$ omezená jednoduše souvislá oblast a $\Gamma \in \mathbb{R}^3$ uzavřená Jordanova křivka. Hledáme $\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}) \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(\omega, \mathbb{R}^3)$ tak, aby platila rovnice (3.4) a byly splněny Dirichletovy okrajové podmínky*

$$\mathbf{X}(\partial\omega) = \Gamma.$$

Slabou formulaci odvodíme výpočtem první variace $\delta A_\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ plošného funkcionálu $A_\omega(\mathbf{X})$ ve směru vektorového pole \mathbf{Y} .

Pro variaci \mathbf{Z} plochy \mathbf{X}

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon \mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta})$$

rozepíšme argument plošného funkcionálu:

$$\|\mathbf{Z}_{\theta_1} \times \mathbf{Z}_{\theta_2}\| = \sqrt{\|\mathbf{Z}_{\theta_1}\|^2 \|\mathbf{Z}_{\theta_2}\|^2 - (\mathbf{Z}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Z}_{\theta_2})^2}.$$

Odvoďme derivace členů argumentu odmocniny ve směrech daných vektorovým polem \mathbf{Y} :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Z}_{\theta_1}\|^2 \|\mathbf{Z}_{\theta_2}\|^2 &= \\ &= (\mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{X}_{\theta_1} + 2\varepsilon \mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_1} + \dots) (\mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{X}_{\theta_2} + 2\varepsilon \mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_2} + \dots) = \\ &= (\mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{X}_{\theta_1}) (\mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{X}_{\theta_2}) + 2\varepsilon [(\mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{X}_{\theta_1}) (\mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_2}) + (\mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{X}_{\theta_2}) (\mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_1})] + \dots, \end{aligned}$$

kde tři tečky opět označují výrazy typu $\varepsilon^2 \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon)$,

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (\|\mathbf{Z}_{\theta_1}\|^2 \|\mathbf{Z}_{\theta_2}\|^2) \right|_{\varepsilon=0} = 2 [(\mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{X}_{\theta_1}) (\mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_2}) + (\mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{X}_{\theta_2}) (\mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_1})].$$

Podobně druhý člen argumentu odmocniny

$$(\mathbf{Z}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Z}_{\theta_2})^2 = (\mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{X}_{\theta_2} + \varepsilon \mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_2} + \varepsilon \mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_1} + \dots)^2,$$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} (\mathbf{Z}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Z}_{\theta_2})^2 \right|_{\varepsilon=0} = 2 (\mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{X}_{\theta_2}) (\mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_2} + \mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_1}).$$

Zjednodušíme zápis první variace plošného funkcionálu:

$$\begin{aligned} \delta A_\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \\ &= \int_\omega [\mathcal{E}(\mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_2}) + \mathcal{G}(\mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_1}) - \mathcal{F}(\mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_2} + \mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_1})] \frac{1}{\mathcal{W}} d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Problém 3 (*Variační formulace*) Ať je $\omega \in \mathbb{R}^2$ omezená jednoduše souvislá oblast a $\Gamma \in \mathbb{R}^3$ uzavřená Jordanova křivka. Hledáme vektorovou funkci $\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}) \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^1(\omega, \mathbb{R}^3)$ tak, aby pro každé $\mathbf{Y} \in C_0^1(\omega, \mathbb{R}^3)$ platilo

$$\int_\omega [(\mathcal{G} \mathbf{X}_{\theta_1} - \mathcal{F} \mathbf{X}_{\theta_2}) \cdot \mathbf{Y}_{\theta_1} + (\mathcal{E} \mathbf{X}_{\theta_2} - \mathcal{F} \mathbf{X}_{\theta_1}) \cdot \mathbf{Y}_{\theta_2}] \frac{1}{\mathcal{W}} d\theta_1 d\theta_2 = 0$$

a byly splněny Dirichletovy okrajové podmínky

$$\mathbf{X}(\partial\omega) = \Gamma.$$

Problém 2, resp. problém 3, bohužel není dobře definovaný, protože pro libovolnou změnu parametru $\varphi : \omega \rightarrow \omega$, která je daná hladkým vzájemně jednoznačným zobrazením ω na ω platí

$$A_\omega(\mathbf{X}) = A_\omega(\mathbf{X} \circ \varphi).$$

Je-li \mathbf{X} řešením problému 2, resp. problému 3, pak $\mathbf{X} \circ \varphi$ je dalším řešením.

Formulaci problému 2, resp. problému 3, zpřesňuje oddíl 3.2.7, který se zabývá i existencí a jednoznačností jejich řešení.

3.2.7 Existence a jednoznačnost řešení Plateauova problému

Tento oddíl je souhrnem vět o řešitelnosti a jednoznačnosti Plateauova problému. S nejednoznačností se setkáváme již na samém počátku formulace úlohy, kdy se můžeme dívat na minimální plochu jako na plochu s nulovou střední křivostí nebo jako na plochu, s nejmenším plošným obsahem.

V oddíle 3.2.6 jsme se setkali s jiným typem nejednoznačnosti, kterou v této kapitole odstraníme. Podobně jako křivku parametrizujeme obloukem, pro parametrické vyjádření plochy můžeme zvolit konformní parametrizaci, pro kterou

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} \right\|^2, \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} = 0.$$

Použijeme-li opět značení z definice 3.4, platí $\mathcal{E} = \mathcal{G}$ a $\mathcal{F} = 0$, a (3.5) přejde k vyjádření

$$\delta A_\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int_\omega (\mathbf{X}_{\theta_1} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_1} + \mathbf{X}_{\theta_2} \cdot \mathbf{Y}_{\theta_2}) d\theta_1 d\theta_2. \quad (3.6)$$

Tato variace, jak později uvidíme, je variací Dirichletova funkcionálu. Dirichletův funkcionál je invariantní vůči konformní (zachovávající úhly) transformaci oblasti ω sama na sebe. Grupa těchto konformních transformací je konečné dimenze. Doplňme tedy formulaci ještě o podmínku tří pevných bodů. Pak jedinou konformní parametrizací oblasti ω sama na sebe, která tuto podmínku splňuje, je identita.

Definice 3.8 *Mějme množiny*

$$\begin{aligned} \omega &= \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2; \theta_1^2 + \theta_2^2 < 1\}, \\ \partial\omega &= \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2; \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1\} \end{aligned}$$

a uzavřenou Jordanovu křivku⁷ $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$.

Řekneme, že $\mathbf{X} : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ je řešením Plateauova problému pro hranici Γ , pokud jsou splněny následující podmínky

- $\mathbf{X} \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(\omega, \mathbb{R}^3)$,
- zobrazení \mathbf{X} splňuje v ω následující rovnosti

$$\Delta \mathbf{X} = 0, \quad (3.7)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} \right\|^2, \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} = 0, \quad (3.8)$$

- restrikce $\mathbf{X}|_{\partial\omega}$ je homeomorfismus $\partial\omega$ na Γ .

Parametrizaci \mathbf{X} plochy $\mathbf{X}(\omega)$ nazveme konformní, pokud splňuje rovnosti (3.8).

Poznámka:

⁷Jordanova křivka je podmnožina \mathbb{R}^3 , která je homeomorfní (tj. existuje mezi nimi spojitě a ryze monotónní zobrazení zobrazení na) s $\partial\omega$.

1. Omezení na zobrazení z otevřeného jednotkového kruhu ω do \mathbb{R}^3 neubírá na obecnosti, protože podle Riemannovy věty je každá jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 různá od celého \mathbb{R}^2 konformně ekvivalentní (existuje prosté konformní zobrazení) otevřenému jednotkovému kruhu.
2. $C^k(\omega, \mathbb{R}^3)$ značí prostor spojitých funkcí z ω do \mathbb{R}^3 , které mají spojitě derivace až do řádu k . V tomto případě se jedná o spojitost vektorových funkcí, kterou rozumíme spojitost jednotlivých souřadnicových funkcí.
3. $\bar{\omega}$ je uzávěr množiny ω a $\partial\omega$ její hranicí.
4. Δ značí Laplaceův operátor.

◁

Definice 3.9 Pro výše uvedenou oblast ω a vektorovou funkci $\mathbf{X} \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(\omega, \mathbb{R}^3)$ definujeme plošný funkcional

$$A(\mathbf{X}) = \int_{\omega} \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} \right\| d\theta_1 d\theta_2$$

a Dirichletův funkcional

$$D(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} \right\|^2 \right) d\theta_1 d\theta_2.$$

Protože prostor regulárních ploch není uzavřený vzhledem ke stejnoměrné konvergenci, hledáme minimum plošného, resp. Dirichletova, funkcionalu na Sobolevově prostoru $W_2^1(\omega, \mathbb{R}^3)$, který tvoří funkce z $L_2(\omega, \mathbb{R}^3)$ a mají spojitě derivace z téhož prostoru. $L_2(\omega, \mathbb{R}^3)$ prostor je přesněji faktorovým prostorem prostoru

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ \mathbf{X}; \int_{\omega} \|\mathbf{X}(\theta_1, \theta_2)\|^2 d\theta_1 d\theta_2 \right\}$$

měřitelných funkcí definovaných na ω . Možným minimem funkcionalu $A(\mathbf{X})$ je celá třída ploch. Některé členy třídy mohou mít „vlasové výčnělky“ nulové míry. Tyto výčnělky je pak nutné odstranit. Minimalizující posloupnosti funkcionalu $D(\mathbf{X})$ mají lepší vlastnosti a problému se vyhneme.

Definice 3.10 $W_2^1(\omega, \mathbb{R}^3)$ je Sobolevův prostor. Pro uzavřenou Jordanovu křivku Γ řekneme, že zobrazení $\mathbf{X} : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ je třídy $\mathcal{C}(\Gamma)$, pokud $\mathbf{X} \in W_2^1(\omega, \mathbb{R}^3)$ a pokud můžeme restrikcí $\mathbf{X}|_{\partial\omega}$ vyjádřit spojitým monotónním (ne nutně ryze monotónním) zobrazením $\Psi : \partial\omega \rightarrow \Gamma$ z $\partial\omega$ na Γ (tj. každá $L_2(\partial\omega)$ -reprezentace $\mathbf{X}|_{\partial\omega}$ je shodná s Ψ až na množinu Hausdorffovy 1-dimenzionální míry nula).

Plošný funkcionál $A(\mathbf{X})$ omezíme shora funkcionálem Dirichletovým $D(\mathbf{X})$:

$$A(\mathbf{X}) \leq D(\mathbf{X}), \quad (3.9)$$

protože pro každé dva vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2.$$

V případě, že \mathbf{X} je konformní parametrizace nastává v (3.9) rovnost. Podle Lichtensteinovy věty, [7] s. 230, můžeme pro každou regulární plochu $\mathbf{X} \in C^{1,\alpha}(\omega)$, $0 < \alpha < 1$, takovou parametrizaci najít. Dále tedy dokazujeme věty o minimu Dirichletova funkcionálu pro konformní parametrizaci plochy.

Uvedeme dvě věty, které zaručí existenci minima Dirichletova funkcionálu. Toto minimum za určitých podmínek splňuje rovnosti (3.8) a je tedy zároveň minimem plošného funkcionálu i řešením Plateauova problému. Existenci minimálních ploch je věnována i velká řada knih. Populární knihou je např. [17]. Kdežto v [6] je téma pojato striktně matematicky. Asi nejkomplexnější pohled z různých oblastí matematiky nabízí [7]. Uvádíme zde jen hlavní myšlenky důkazů formulovaných vět. Podrobněji jsou důkazy popsány např. v [7], kapitola 4.

Věta 3.2 (*Existence minima Dirichletova funkcionálu*) *Pokud je $\mathcal{C}(\Gamma)$ neprázdná, pak existuje $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}(\Gamma)$ taková, že*

$$D(\tilde{\mathbf{X}}) = \inf \{D(\mathbf{X}); \mathbf{X} \in \mathcal{C}(\Gamma)\},$$

která je spojitá na $\bar{\omega}$ a harmonická (splňuje (3.7)) na ω . Speciálně, pro každou uzavřenou Jordanovu křivku Γ konečné délky taková $\tilde{\mathbf{X}}$ existuje.

Důkaz:

1. Protože hodnoty Dirichletova integrálu jsou zdola omezené a $\mathcal{C}(\Gamma)$ je podle předpokladu neprázdná, existuje

$$\inf \{D(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \mathcal{C}(\Gamma)\},$$

které označíme $e(\Gamma)$. Dále hledáme $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}(\Gamma)$, pro které $D(\tilde{\mathbf{X}}) = e(\Gamma)$.

2. Ukážeme, že problém hledání minima $D(\mathbf{X})$ v $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ je ekvivalentní problému hledání minima v $\mathcal{C}^*(\Gamma)$, která obsahuje funkce z $\mathcal{C}(\Gamma)$, jež navíc splňují podmínku tří pevných bodů, tj.

$$\mathbf{X}(\theta_{1,i}, \theta_{2,i}) = Q_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

kde $(\theta_{1,i}, \theta_{2,i})$ jsou tři různé body na $\partial\omega$ a Q_i jsou tři různé body na Γ .

3. Pomocí Fourierova rozvoje homeomorfní reprezentace Γ odvodíme postačující podmínku (nikoliv nutnou), že pro každou uzavřenou Jordanovu křivku konečné délky je množina $\mathcal{C}(\Gamma)$, resp. $\mathcal{C}^*(\Gamma)$, neprázdná.
4. Vybereme posloupnost $\{\mathbf{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ zobrazení $\mathbf{X}_n \in \mathcal{C}^*(\Gamma)$ takovou, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\mathbf{X}_n) = \inf \{D(\mathbf{X}); \mathbf{X} \in \mathcal{C}^*(\Gamma)\},$$

$$\mathbf{X}_n \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(\omega, \mathbb{R}^3),$$

$$\Delta \mathbf{X}_n = 0 \quad \text{v } \omega.$$

Jinak nahradíme \mathbf{X}_n řešením \mathbf{Z}_n okrajové úlohy

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Z}_n &= 0 && \text{v } \omega, \\ \mathbf{Z}_n &= \mathbf{X}_n && \text{na } \partial\omega, \end{aligned}$$

které existuje právě jedno a je z $C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(\omega, \mathbb{R}^3) \cap W_2^1(\omega, \mathbb{R}^3)$.

5. Posloupnost $D(\mathbf{X}_n)$ konverguje a je tedy omezená. Pomocí Courantova-Lebesgueova lemmatu (znění lemmatu je uvedeno za tímto důkazem, důkaz lemmatu pak v [7] s. 239) ukážeme, že členy posloupnosti okrajových hodnot $\mathbf{X}_n|_{\partial\omega}$ jsou stejně spojitě, tj.:

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{X}_n|_{\partial\omega})(\forall \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}' \in \partial\omega) : \\ \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{X}_n(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{X}_n(\boldsymbol{\theta}')\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

6. Navíc $\mathbf{X}_n(\partial\omega) = \Gamma$, tedy funkce $\mathbf{X}_n|_{\partial\omega}$ jsou stejně omezené.
7. Tím jsou splněny předpoklady Arzelàovy-Ascoliovy věty (pro stejně omezené a stejně spojitě funkce existuje stejnoměrně konvergentní vybraná posloupnost), jejímž důsledkem je stejnoměrná konvergence posloupnosti $\mathbf{X}_n|_{\partial\omega}$ k nějakému zobrazení $\Psi \in C^0(\partial\omega, \mathbb{R}^3)$ na $\partial\omega$, které je navíc monotónní z $\partial\omega$ na Γ .
8. Protože jsou funkce \mathbf{X}_n spojitě na $\bar{\omega}$ a harmonické v ω , posloupnost konverguje stejnoměrně k nějaké funkci \mathbf{X}^* , která je spojitá na $\bar{\omega}$, harmonická v ω a splňuje podmínku tří pevných bodů. Platí $\mathbf{X}^* \in \mathcal{C}^*(\Gamma)$ a

$$\inf \{D(\mathbf{X}); \mathbf{X} \in \mathcal{C}^*(\Gamma)\} \leq D(\mathbf{X}^*).$$

9. Protože posloupnost i její limita jsou harmonické funkce dostáváme i obrácenou nerovnost. Tedy $D(\mathbf{X}^*) = \inf \{D(\mathbf{X}); \mathbf{X} \in \mathcal{C}^*(\Gamma)\}$.

□

Lemma 3.1 (*Courantovo-Lebesgueovo*)

Předpokládejme, že $\mathbf{X} \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(\omega, \mathbb{R}^3)$ a splňuje

$$D(\mathbf{X}) < M$$

pro nějaké M , $0 \leq M \leq \infty$. Pak pro každý bod $\boldsymbol{\theta}_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}) \in \partial\omega$ a pro každé $\delta \in (0, 1)$ existuje poloměr $r \in (\delta, \sqrt{\delta})$ takový, že vzdálenost obrazů $\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}')$, $\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}'')$ dvou průsečíků $\boldsymbol{\theta}' = (\theta'_1, \theta'_2)$, $\boldsymbol{\theta}'' = (\theta''_1, \theta''_2)$ kružnice $\partial\omega_r(\boldsymbol{\theta}_0)$, kde $\omega_r(\boldsymbol{\theta}_0) = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2; \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0\| < r\}$, s kružnicí $\partial\omega$ je odhadnuta

$$\|\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}') - \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}'')\| \leq \sqrt{\frac{4M\pi}{\ln(1/\delta)}}.$$

Věta 3.3 Každé minimum $\tilde{\mathbf{X}}$ Dirichletova integrálu ve třídě $\mathcal{C}(\Gamma)$ je spojitě na $\bar{\omega}$ a harmonické na ω .

Důkaz: Pro libovolnou testovací funkci $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) \in C_0^\infty(\omega, \mathbb{R}^3)$, kde $C_0^\infty(\omega, \mathbb{R}^3)$ je třída nekonečně spojitých zobrazení z ω do \mathbb{R}^3 s kompaktním nosičem, a pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$ je $\tilde{\mathbf{X}} + \varepsilon\boldsymbol{\Psi} \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Protože $\tilde{\mathbf{X}}$ je minimum Dirichletova funkcionálu, má kvadratická funkce

$$f(\varepsilon) = D(\tilde{\mathbf{X}} + \varepsilon\boldsymbol{\Psi}) = D(\tilde{\mathbf{X}}) + 2\varepsilon D(\tilde{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\Psi}) + \varepsilon^2 D(\boldsymbol{\Psi})$$

minimum pro $\varepsilon = 0$, tedy pro každé $\boldsymbol{\Psi}$

$$0 = D(\tilde{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\Psi}) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}}{\partial \theta_2} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \theta_2} \right) d\theta_1 d\theta_2 = -\frac{1}{2} \int_{\omega} \tilde{\mathbf{X}} \Delta \boldsymbol{\Psi} d\theta_1 d\theta_2.$$

Podle Weylova lemmatu (slabé řešení $\int_{\omega} \tilde{\mathbf{X}} \Delta \boldsymbol{\Psi} = 0$ Laplaceovy rovnice je harmonické) je $\tilde{\mathbf{X}}$ harmonická v ω . Protože navíc $\tilde{\mathbf{X}}|_{\partial\omega} \in C^0(\partial\omega, \mathbb{R}^2)$, je také $\tilde{\mathbf{X}} \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^2)$. □

Věta 3.4 (*Existence řešení Plateauova problému*) Za předpokladů věty 3.2 navíc platí, že minimum $\mathbf{X}^* \in \mathcal{C}(\Gamma)$ Dirichletova funkcionálu $D(\mathbf{X})$ je konformní a zobrazuje topologicky $\partial\omega$ na Γ .

Důkaz: Pro přehlednost rozdělíme důkaz do několika částí a uvedeme zde pouze jejich hlavní myšlenky.

1. Zavedeme vnitřní variaci $\partial D(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ Dirichletova funkcionálu pro libovolné vektorové pole $\mathbf{Y} (Y_1(\theta_1, \theta_2), Y_2(\theta_1, \theta_2)) = \mathbf{Y} \in C^1(\bar{\omega}, \mathbb{R}^2)$ předpisem

$$\begin{aligned} \partial D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\omega} \left[\left(\left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} \right\|^2 \right) \left(\frac{\partial Y_1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial Y_2}{\partial \theta_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_2} \left(\frac{\partial Y_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial Y_2}{\partial \theta_1} \right) \right] d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned}$$

2. Ukážeme, že pokud je plocha $\mathbf{X} \in W_2^1(\omega, \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{Y} \in C^1(\bar{\omega}, \mathbb{R}^2)$ je libovolné vektorové pole a $\partial D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$, pak \mathbf{X} splňuje rovnosti (3.8) téměř všude v ω . Obráceně platí, že pokud jsou splněny rovnosti (3.8) téměř všude v ω pro nějakou $\mathbf{X} \in W_2^1(\omega, \mathbb{R}^3)$, pak $\partial D(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$.
3. S použitím vnitřní variace $D(\mathbf{X})$ odvodíme invariantnost Dirichletova funkcionálu vzhledem ke konformnímu zobrazení, a každé řešení \mathbf{X}^* variačního problému v $\mathcal{C}(\Gamma)$ je minimální plocha.
4. Protože $\mathbf{X}^* \in \mathcal{C}(\Gamma)$ je spojitá v $\bar{\omega}$, harmonická v ω a konformní, můžeme ukázat, že určuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\partial\omega$ na Γ , které je topologickým zobrazením $\partial\omega$ na Γ .

□

Nyní uveďme klíčové věty o jednoznačnosti.

Věta 3.5 *Pokud existuje vzájemně jednoznačná rovnoběžná projekce křivky Γ na uzavřenou rovinnou konvexní Jordanovu křivku γ , pak existuje nejvýše jedna minimální plocha.*

Důkaz: Bez újmy na obecnosti, můžeme provést rotaci soustavy souřadné tak, že směr promítání je rovnoběžný se směrem osy z a rovinou, do níž promítáme, je rovina (x, y) .

1. x ová a y ová složka minimální plochy $\mathbf{X} \in \mathcal{C}(\Gamma)$ určují difeomorfismus φ z ω na konvexní oblast Ω uvnitř γ .
2. Označíme

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} \circ \varphi^{-1}, \quad \mathbf{Z} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

neparametrickou reprezentaci plochy $\mathbf{X}(\omega)$, která je řešením rovnice minimální plochy, ale nemá nutně spojité okrajové hodnoty.

3. Důkaz jednoznačnosti provedeme sporem. Předpokládáme, že existují dvě různá řešení \mathbf{X} , $\tilde{\mathbf{X}}$ Plateauova problému pro křivku Γ . Jim odpovídají neparame-
trické reprezentace \mathbf{Z} a $\tilde{\mathbf{Z}}$. Pokud je projekce vzájemně jednoznačné zobrazení,
pak φ je homeomorfismus z $\bar{\omega}$ na $\bar{\Omega}$. Důsledkem toho a důsledkem spojitosti
 \mathbf{X} , $\tilde{\mathbf{X}}$ na $\bar{\omega}$, \mathbf{Z} , $\tilde{\mathbf{Z}}$ na $\bar{\Omega}$ a spojitosti rozdílu $\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}$ na $\partial\Omega$ je tento rozdíl nulový.
4. $\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}}$ splňuje lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu, pro kterou
platí princip maxima. Na $\bar{\Omega}$ nastává shodnost obou zobrazení.
5. Protože \mathbf{X} , $\tilde{\mathbf{X}}$ jsou konformní a invertibilní, $\mathbf{X}^{-1} \circ \tilde{\mathbf{X}}$ je konformní z ω na ω .
podmínka tří pevných bodů zaručuje jejich shodnost.

□

Poznámka:

1. Podmínky na vzájemně jednoznačné zobrazení lze zmírnit. Přestože křivka Γ
obsahuje např. úsečku ve směru promítání, která se zobrazí do jediného bodu
na γ , existuje nejvýše jedna minimální plocha.
2. Obecnější je i Nitscheova věta, která říká, že pro každou regulární analytickou
křivku, jejíž celková křivost je menší než 4π existuje právě jedna minimální
plocha. Její důkaz je velmi obsáhlý a můžeme ho nalézt v [16].

◁

3.3 Membránová konstrukce

Protože mechanika není hlavním tématem této práce, jsou úvahy bez precizních
definic a důkazů. Dále předpokládáme, že všechny funkce jsou tak spojitě a jejich
derivace existují, aby úvahy v této kapitole měly smysl. Také předpokládáme, že
pohyby a deformace probíhají tak pomalu, že nedochází k působení setrvačných sil.

Polohy bodů tělesa v počáteční (nedeformované) konfiguraci jsou popsány bo-
dovou funkcí $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\boldsymbol{\theta})$, v aktuální (deformované) konfiguraci bodovou funkcí
 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta})$. Velká a malá písmena budou nadále rozlišovat parametry v počáteční
(velká písmena) a aktuální konfiguraci (malá písmena). Obecně jsou obě bodové
funkce $\mathbf{X}, \mathbf{x} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Polohu \mathbf{x} bodů v deformovaném stavu vyjádříme zob-
razením ϕ , které udává aktuální polohu bodů kontinua v závislosti na počáteční
(referenční) konfiguraci \mathbf{X} a čase t :

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t). \quad (3.10)$$

Pro pevný bod P je ϕ jeho trajektorii při deformaci v čase. Pro pevné t určuje ϕ vztah mezi počáteční a aktuální konfigurací kontinua. Pokud je zobrazení $\phi = \phi(\mathbf{X}, t)$ mezi současným \mathbf{x} a počátečním \mathbf{X} stavem kontinua diferencovatelné, pak gradientem deformace nazveme tenzor \mathbf{F} , pro který

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}}.$$

Poznámka: Často se využívá zkrácený zápis $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ místo (3.10), což umožňuje zápis gradientu deformace ve známějším tvaru

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}},$$

ve složkách pak

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \text{ resp. } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}.$$

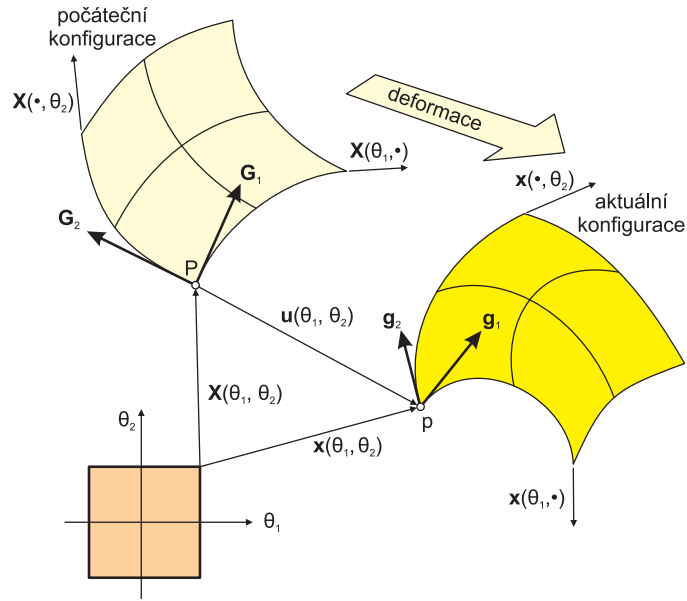
Gradient deformace je vzhledem k dimenzi prostoru, v němž se pohybujeme, matice 3×3 . ◁

Tělesem je v našem případě membrána v rovnovážném stavu uvnitř pevné hranice. Tvar membrány je vyvolán pouze počátečním předpětím a nepůsobí na ni žádné vnější síly (jinak je tomu např. u nafukovaných konstrukcí, kde bychom uvažovali tlak uzavřeného plynu). Vektory napětí působí jen v tečných podprostorech a nevyvolávají tak „vrásnění“ membrány. Pokud se tloušťka membrány v průběhu deformace nemění (nenastává tzv. Poissonův efekt), vyjádříme objemový element v závislosti na plošném $dV = H dA$, kde H značí konstantní tloušťku membrány. Bod P na ploše je popsán bodovou funkcí $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\theta_1, \theta_2)$ pomocí dvojice nezávislých proměnných θ_1 a θ_2 , Obr. 3.4.

Poznámka: Protože zanedbáváme deformace v jednom rozměru, definujeme následující zobrazení $\phi_0(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{X}(\theta_1, \theta_2)$, mezi rovinnými souřadnicemi a počátečním stavem, a $\phi_t(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{x}(\theta_1, \theta_2)$, mezi rovinnými souřadnicemi a aktuálním stavem. Jím příslušné gradienty

$$\mathbf{F}_0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial X_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial X_3}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{F}_t = \frac{\partial \phi_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} \end{pmatrix}$$

jsou v tomto případě matice 3×2 . Při výpočtu gradientu deformace tedy záleží na vyjádření složek jednotlivých vektorových funkcí a jím příslušných parciálních



Obrázek 3.4: Deformace plochy

derivací, např. pro souřadnicové funkce (skalární funkce více proměnných) x_i , $i = 1, 2$, vektorové funkce \mathbf{x}

$$x_i(\theta_1, \theta_2) = x_i(X_1(\theta_1, \theta_2), X_2(\theta_1, \theta_2), X_3(\theta_1, \theta_2)).$$

S přihlednutím k derivaci složené funkce, pak můžeme vyjádřit závislost mezi jednotlivými gradienty deformace rovností $\mathbf{F}\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_t$. \triangleleft

Sloupcům gradientu deformace \mathbf{F}_t v diferenciální geometrii odpovídají kovariantní vektory \mathbf{g}_1 a \mathbf{g}_2 definované jako parciální derivace \mathbf{x} vzhledem k proměnným θ_1, θ_2 :

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2.$$

Tyto vektory leží v tečném vektorovém prostoru plochy v bodě P , jsou tečnami ke křivkám $\mathbf{x}(\theta_1, \cdot)$, $\mathbf{x}(\cdot, \theta_2)$ a obecně nejsou ortonormální.

Povrch plochy v aktuální konfiguraci odvodíme následovně. Část (velmi malá) da povrchu a plochy \mathbf{x} se přibližně rovná obsahu rovnoběžníku, jehož strany jsou ve směru vektorů \mathbf{g}_i , $i = 1, 2$, vynásobených (velmi malými) koeficienty $d\theta_i$, srovnajme s Obr. 3.2. Celkový povrch plochy vyjádříme jako:

$$a = \int_a da = \int_\omega \|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\| d\theta_1 d\theta_2 = \int_\omega \sqrt{\det(\mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t)} d\theta_1 d\theta_2, \quad (3.11)$$

kde $\mathbf{C}_t = \mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t$ je metrický tenzor (bývá nazývaný i *pravý Cauchyův-Greenův tenzor deformace*).

Dvojici kovariantních vektorů můžeme doplnit o třetí vektor - vektor jednotkové vnější normály

$$\mathbf{g}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\|} (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2).$$

Koeficienty kovariantního metrického tenzoru jsou dány vztahem

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

což se dá schematicky zapsat jako

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Pro počáteční konfiguraci je umístění bodu P určeno bodovou funkcí \mathbf{X} a můžeme pro ni obdobně definovat kovariantní vektory \mathbf{G}_i i souřadnice kovariantního metrického tenzoru G_{ij} .

Vyjádříme povrch A plochy v počáteční konfiguraci:

$$A = \int_A dA = \int_{\omega} \|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2\| d\theta_1 d\theta_2 = \int_{\omega} \sqrt{\det(\mathbf{F}_0^T \mathbf{F}_0)} d\theta_1 d\theta_2, \quad (3.13)$$

kde $\mathbf{C}_0 = \mathbf{F}_0^T \mathbf{F}_0$ označíme metrický tenzor.

Kontravariantní vektory $\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ jsou definované pravidlem:

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

A obdobně definujeme i kontravariantní vektory \mathbf{G}^i . Absence deformace ve směru hlavní normály k ploše je i důvodem pro normování vektoru \mathbf{g}_3 , resp. \mathbf{G}_3 . Tento fakt se dále projeví jako jednička v pravém dolním rohu matice (3.12) metrického tenzoru počáteční i aktuální konfigurace.

Pomocí tenzorového součinu \otimes ⁸ je:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i,$$

což lze ověřit mechanicky výpočtem. Pokud je plocha „téměř ve všech“ bodech regulární, pak jsou kovariantní vektory \mathbf{g}_i , resp. \mathbf{G}_i , lineárně nezávislé a matice \mathbf{F} je regulární.

⁸Tenzorový součin vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b} je $(a_1, a_2, a_3) \otimes (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$

Povrch a aktuální konfigurace plochy v závislosti na počáteční konfiguraci⁹ získáme postupnými úpravami (3.11) pomocí (3.13):

$$\begin{aligned} a &= \int_a da = \int_\omega \frac{\sqrt{\det(\mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t)}}{\sqrt{\det(\mathbf{F}_0^T \mathbf{F}_0)}} \sqrt{\det(\mathbf{F}_0^T \mathbf{F}_0)} d\theta_1 d\theta_2 = \int_A \frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{\sqrt{\det(G_{kl})}} dA = \\ &= \int_A \frac{\det(\mathbf{g}_i)}{\det(\mathbf{G}^k)} dA = \int_A \det(\mathbf{g}_i) \det(\mathbf{G}^k) dA = \int_A \det \mathbf{F} dA. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Příklad 1: Uvažujme kulovou plochu s poloměrem r a středem v počátku soustavy souřadné jako počáteční konfiguraci deformace. Její parametrizaci můžeme vyjádřit:

$$\mathbf{X}(\theta_1, \theta_2) = (r \cos \theta_1 \cos \theta_2, r \cos \theta_1 \sin \theta_2, r \sin \theta_1), \quad \theta_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta_2 \in [0, 2\pi].$$

Aktuální konfigurace odpovídá trojosému elipsoidu s parametry a, b, c , středem v počátku soustavy souřadné a parametrizací

$$\mathbf{x}(\theta_1, \theta_2) = (a \cos \theta_1 \cos \theta_2, b \cos \theta_1 \sin \theta_2, c \sin \theta_1), \quad \theta_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta_2 \in [0, 2\pi].$$

Označíme-li souřadnicové funkce parametrizace $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$, můžeme vyjádřit souřadnicové funkce aktuální konfigurace v závislosti na souřadnicových funkcích počáteční konfigurace

$$\mathbf{x}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{a}{r}X_1, \frac{b}{r}X_2, \frac{c}{r}X_3\right).$$

Gradient deformace mezi počáteční a aktuální konfigurací je jednoduše

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{a}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{r} \end{pmatrix}.$$

Známe-li povrch kulové plochy $A = \frac{4}{3}\pi r^3$, můžeme vyjádřit povrch elipsoidu

$$a = \int_A \det \mathbf{F} dA = \int_A \frac{abc}{r^3} dA = \frac{abc}{r^3} \int_A dA = \frac{4}{3}\pi abc.$$

◁

⁹ (\mathbf{g}_i) je matice 3×3 a $\det(\mathbf{g}_i) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{pmatrix}$.

Minimální plocha odpovídá membráně, na kterou nepůsobí žádné vnější síly a která má nulovou hmotnost. Označme \mathbf{x} bodovou funkci plochy, která minimalizuje (3.14) vzhledem k pevně zvoleným okrajovým podmínkám. Tato bodová funkce je stacionárním bodem plošného funkcionálu. Variace δa povrchu plochy vzhledem k libovolné variaci $\delta \mathbf{x}$ bodové funkce (srovnejme s oddílem 3.2.6, kde variaci odpovídá vektorové pole), která splňuje podmínku $\mathbf{y} \cdot \mathbf{g}_3 \neq 0$, je nulová:

$$0 = \delta a = \left. \frac{d}{d\varepsilon} a(\mathbf{x} + \varepsilon \delta \mathbf{x}) \right|_{\varepsilon=0} = \delta \left(\int_a da \right) = \int_A \delta(\det \mathbf{F}) dA. \quad (3.15)$$

Poznamenejme, že povrch A plochy v počáteční konfiguraci je invariantní vůči variaci tvaru plochy. Po úpravách¹⁰

$$\begin{aligned} \delta \det \mathbf{F} &= \det \begin{pmatrix} F_{22} & F_{23} \\ F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \delta F_{11} - \det \begin{pmatrix} F_{21} & F_{23} \\ F_{31} & F_{33} \end{pmatrix} \delta F_{12} + \det \begin{pmatrix} F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{pmatrix} \delta F_{13} + \\ &\quad - \det \begin{pmatrix} F_{12} & F_{13} \\ F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \delta F_{21} + \det \begin{pmatrix} F_{11} & F_{13} \\ F_{31} & F_{33} \end{pmatrix} \delta F_{22} - \det \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{31} & F_{321} \end{pmatrix} \delta F_{23} + \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} F_{12} & F_{13} \\ F_{22} & F_{23} \end{pmatrix} \delta F_{31} - \det \begin{pmatrix} F_{11} & F_{13} \\ F_{21} & F_{23} \end{pmatrix} \delta F_{32} + \det \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \delta F_{33} = \\ &= \det \mathbf{F} \left(F_{11}^{(-1)} \delta F_{11} + F_{21}^{(-1)} \delta F_{12} + F_{31}^{(-1)} \delta F_{13} + \right. \\ &\quad \left. + F_{12}^{(-1)} \delta F_{21} + F_{22}^{(-1)} \delta F_{22} + F_{32}^{(-1)} \delta F_{23} + \right. \\ &\quad \left. + F_{13}^{(-1)} \delta F_{31} + F_{23}^{(-1)} \delta F_{32} + F_{33}^{(-1)} \delta F_{33} \right) = \\ &= \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F}), \end{aligned}$$

které vycházejí z rozvoje determinantu podle řádku. $F_{ij}^{(-1)}$ značí prvek inverzní matice na pozici ij nikoliv převrácenou hodnotu F_{ij}^{-1} . (3.15) pak můžeme napsat jako

$$\delta a = \int_A \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F}) dA = 0, \quad (3.16)$$

kde

$$\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i = \frac{\partial(\delta \mathbf{x})}{\partial \mathbf{X}}.$$

Vyjádríme-li jednotkový tenzor \mathbf{I} v kovariantní bázi

$$\mathbf{I} = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad (3.17)$$

¹⁰Vyjádríme-li složky matic $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, pak dvojtečkový součin tenzorů $A : B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$. Protože jsou obě matice čtvercové, můžeme dále zapsat $A : B = \text{tr}(AB^T)$, kde $\text{tr}(A) = \sum a_{ii}$.

rozepíšeme integrand z (3.16)

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F} &= \mathbf{I} \mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F} = [(\mathbf{I} \mathbf{g}^k) \otimes \mathbf{G}_k] : (\delta \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{G}^l) = \\ &= (\mathbf{I} \mathbf{g}^k) \cdot \delta \mathbf{g}_k = \\ &= [g^{ij} (\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{g}_i] \cdot \delta \mathbf{g}_k = \\ &= g^{ij} \mathbf{g}_i \cdot \delta \mathbf{g}_j.\end{aligned}$$

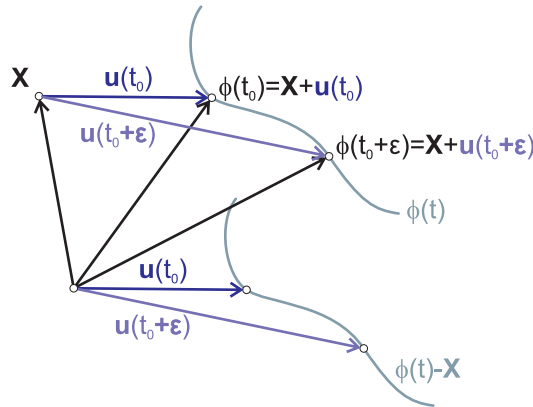
Z rovnosti

$$g_{kj} g^{ij} = \delta_k^i \quad (\text{sčítáme přes opakující se index } j),$$

která představuje devět rovnic, vypočteme g^{ij} pomocí g_{kj} a rozepíšeme (3.16)

$$0 = \delta a = \int_{\omega} [(g_{22} \mathbf{g}_1 - g_{12} \mathbf{g}_2) \cdot \delta \mathbf{g}_1 + (g_{11} \mathbf{g}_2 - g_{12} \mathbf{g}_1) \cdot \delta \mathbf{g}_2] \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} d\theta_1 d\theta_2.$$

Výsledek můžeme srovnat s výsledkem odvozeným v oddílu 3.2.6.



Obrázek 3.5: Práce

Obdobně odvodíme i rovnici virtuální práce pro membránu. Zavedme *posuv* \mathbf{u} bodu P jako

$$\mathbf{u}(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{x}(\theta_1, \theta_2) - \mathbf{X}(\theta_1, \theta_2), \text{ resp.}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (3.18)$$

Práce, kterou vykoná bod odpovídající pevným rovinným souřadnicím (θ_1, θ_2) z počáteční polohy $\phi(\cdot, t_0) = \phi(\mathbf{X}(\theta_1, \theta_2), t_0)$ do polohy $\phi(\cdot, t_0 + \varepsilon)$, Obr. 3.5¹¹, je rovna součinu velikosti síly potřebné k přemístění bodu ve směru dráhy a délky

¹¹Z popisu polohy bodu jsou v obrázku vypuštěny rovinné souřadnice, které jsou pevné.

dráhy. Pokud se bod pohybuje po křivočaré trajektorii $\phi(\cdot, t)$ v důsledku síly $\mathbf{R}(\cdot, t) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, t)$ závislé na čase, vykoná práci

$$w(\cdot, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \mathbf{R}(\cdot, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}(\cdot, t) dt.$$

V následujících dvou krocích je variačními postupy odvozena první variace práce:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} w(\cdot, \varepsilon) &= \mathbf{R}(\cdot, t_0 + \varepsilon) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}(\cdot, t) \Big|_{t=t_0+\varepsilon}, \\ \delta w(\cdot) &= \frac{d}{d\varepsilon} w(\cdot, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \mathbf{R}(\cdot, t_0) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}(\cdot, t) \Big|_{t=t_0}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Pokud je pevně zvolený bod v čase t_0 v rovnovážném stavu, pak pro jeho vychýlení z této polohy libovolným směrem je nutno vykonat kladnou práci. Pro první variaci práce tedy platí:

$$\delta w(\cdot) = 0.$$

Jsou-li všechny body tělesa v čase t_0 v rovnováze, označíme tuto konfiguraci $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t_0)$ a vypočteme celkovou variaci práce δw tělesa integrováním přes objem počáteční konfigurace (veličiny vystupující ve vyjádření virtuální práce jsou vztažené k počáteční konfiguraci):

$$\delta w = \int_V \mathbf{R}(\mathbf{X}, t_0) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \Big|_{t=t_0} dV. \quad (3.20)$$

Protože počáteční konfigurace \mathbf{X} je nezávislá na čase t , pomocí rovnice (3.18) přepíšeme rovnici (3.20) do tvaru

$$\delta w = \int_V \mathbf{R}(\mathbf{X}, t_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \Big|_{t=t_0} dV, \quad (3.21)$$

kde člen $\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0}$ představuje virtuální posuv¹², který označíme $\delta \mathbf{u}$.

Lagrangeův variační princip říká, že mezi všemi funkcemi posuvu zachovávajícími spojitost tělesa a splňujícími geometrické okrajové podmínky se realizují právě ty posuvy, které udělají potenciální energii stacionární hodnotu. Základní rovnicí je rovnice virtuální práce vyjádřená vzhledem k počáteční konfiguraci pomocí gradientu deformace. Z pohledu mechaniky je gradient deformace \mathbf{F} klíčovou veličinou a začneme tedy s jeho zavedením.

¹²Setkáme se i s termínem virtuální rychlost, protože derivace dráhy \mathbf{u} podle času t udává vektor rychlosti.

Nyní odvodíme rovnici virtuální práce pro aktuální konfiguraci \mathbf{x} , vyjádříme ji pomocí gradientu deformace \mathbf{F} vzhledem k počáteční konfiguraci a porovnáme s (3.21). Pokud je těleso, které zaujímá v aktuální konfiguraci objem v , v rovnováze, pak jsou plošné \mathbf{t} (síla na jednotku plochy) a objemové \mathbf{f} (síla na jednotku objemu) síly vyrovnané a platí:

$$\int_{\partial v} \mathbf{t} da + \int_v \mathbf{f} dv = \mathbf{0}.$$

Vyjádříme-li plošné síly $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ pomocí Cauchyho tenzoru napětí¹³ $\boldsymbol{\sigma}$ a jednotkové vnější normály \mathbf{n} , Greenovou větou dostáváme¹⁴ rovnováhu sil vyjádřenou rovnicí:

$$\int_v (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) dv = \mathbf{0},$$

lokálně v každém bodě tělesa pak

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Rovnice (3.22) rovnováhy představuje klasickou formulaci úlohy. Pokud v konkrétním bodě není dosažena rovnováha sil, pak levá strana rovnice (3.22) dává nenulovou výslednici sil, kterou označíme vektorem \mathbf{r} . Vyjádření virtuální práce vzhledem k aktuální konfiguraci

$$\delta w = \int_v \mathbf{r}(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) dv \quad (3.23)$$

je obdobné rovnici (3.21). Využijeme-li rovnosti pro divergenci součinu tenzoru a vektoru

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}^T \delta \mathbf{u}) = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{u}, \quad (3.24)$$

kde poslední člen označuje gradient vzhledem k aktuální konfiguraci

$$\nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \delta u_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} \delta u_1 & \frac{\partial}{\partial x_3} \delta u_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \delta u_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} \delta u_2 & \frac{\partial}{\partial x_3} \delta u_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \delta u_3 & \frac{\partial}{\partial x_2} \delta u_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} \delta u_3 \end{pmatrix}.$$

Nyní vyjádříme virtuální práci jako rozdíl vnější δw_{EX} a vnitřní δw_{IN} virtuální práce

$$\delta w = \delta w_{EX} - \delta w_{IN} = \int_v \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dv + \int_{\partial v} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} da - \int_v \boldsymbol{\sigma} : \nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{u} dv.$$

¹³Cauchyho tenzor napětí je vlastně matice, jejíž řádky jsou vektory napětí ve směrech jednotkových vektorů soustavy souřadné. Známe-li hlavní normálu plošky, na kterou působí plošné síly, můžeme pomocí Cauchyho tenzoru napětí určit plošnou sílu - vektor napětí - působící na tuto plošku.

¹⁴Divergence $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}, \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}, \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right)$ je vyjádřena vzhledem k aktuální konfiguraci \mathbf{x} .

Z rovnováhy momentů lze odvodit symetrii Cauchyho tenzoru napětí a transponovaný tenzor v (3.24) můžeme tedy nahradit tenzorem netransponovaným. Úpravou gradientu virtuálního posuvu

$$\frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \frac{\partial(\delta\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial(\delta\mathbf{x})}{\partial\mathbf{X}} \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{x}} = \delta \left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}} \right) \mathbf{F}^{-1} = \delta\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1},$$

získáme vnitřní virtuální práci vykonanou napětím tělesa vzhledem k referenční konfiguraci

$$\begin{aligned} \delta w_{IN} &= \int_V \boldsymbol{\sigma} : (\delta\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}) \det \mathbf{F} \, dV = \\ &= \int_V \det \mathbf{F} \operatorname{tr} \left[\boldsymbol{\sigma} (\delta\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1})^T \right] dV = \\ &= \int_V \det \mathbf{F} \operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \delta\mathbf{F}^T) dV = \\ &= \int_V \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}) : \delta\mathbf{F} \, dV = \tag{3.25} \\ &= \int_V \det \mathbf{F} (\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}) : \delta\mathbf{F} \, dV = \\ &= \int_V (\mathbf{F} \det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}) : \delta\mathbf{F} \, dV \\ &= \int_V (\mathbf{F} \mathbf{S}) : \delta\mathbf{F} \, dV, \end{aligned}$$

kde \mathbf{S} je *druhý Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí*. Mechanickými úpravami se rozepíše oba tenzory napětí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \text{ resp.} \\ \mathbf{S} &= \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \det \mathbf{F} (\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i) (\sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) (\mathbf{g}^j \otimes \mathbf{G}_j) = \\ &= \det \mathbf{F} \sigma^{ij} (\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i) (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) (\mathbf{g}^j \otimes \mathbf{G}_j) = \det \mathbf{F} \sigma^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \\ &= S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j, \end{aligned}$$

v souřadnicích vzhledem ke křivočarým a obecně neortonormálním bázím \mathbf{g}_i , resp. \mathbf{G}_i . Ze zápisu je patrné, že se souřadnice tenzoru vzhledem k daným bázím liší pouze v násobku determinantem gradientu deformace.

Dále rozepíšeme integrand

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} : \delta\mathbf{F} &= [(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{g}^k) \otimes \mathbf{G}_k] : (\delta\mathbf{g}_l \otimes \mathbf{G}^l) = \\ &= (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{g}^k) \cdot \delta\mathbf{g}_k = \\ &= [\sigma^{ij} (\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{g}_i] \cdot \delta\mathbf{g}_k = \\ &= \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \cdot \delta\mathbf{g}_j \end{aligned}$$

a tím rovnice virtuální práce získá tvar

$$0 = \delta w = H \int_{\omega} \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \cdot \delta \mathbf{g}_j \sqrt{\det(g_{kl})} d\theta_1 d\theta_2, \quad (3.26)$$

kde H je tloušťka membrány, která se během výpočtu nemění.

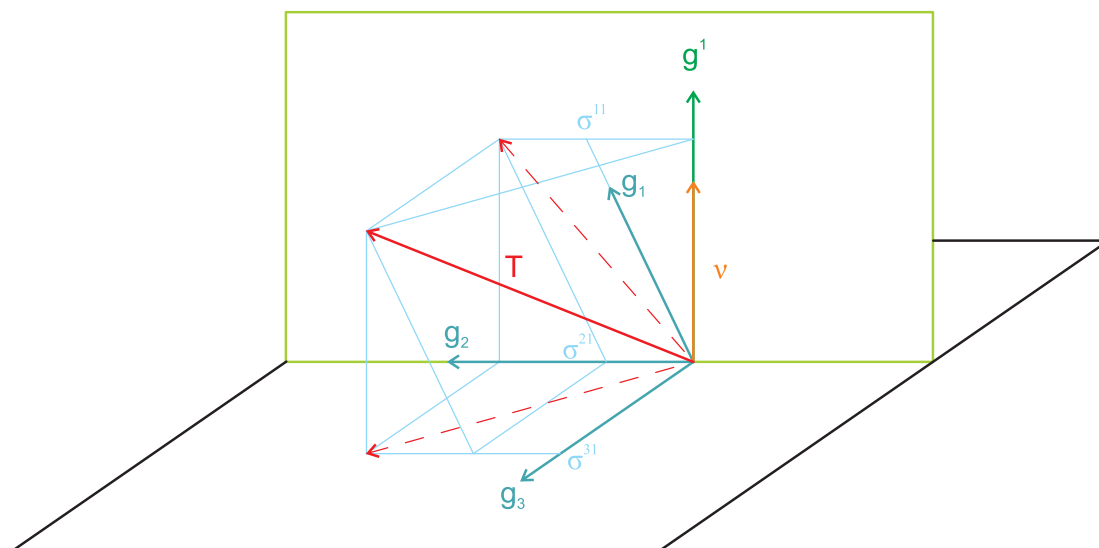
Problém 4 Pro dané konstantní výsledné pole napětí $\boldsymbol{\sigma}$ a pevně danou počáteční konfiguraci $\mathbf{X} \in C^1(\omega, \mathbf{R}^3)$ hledejme posuvy $\mathbf{u} \in W_{4,0}^1(\omega, \mathbf{R}^3)$ tak, aby platila rovnice (3.26) a zároveň byla splněna okrajová podmínka

$$\Gamma = \{\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\theta} \in \partial\omega\},$$

kde $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ je zadaná uzavřená Jordanova křivka (restrikce zobrazení $\mathbf{X} + \mathbf{u}$ na $\partial\omega$ je homeomorfní zobrazení s Γ).

Protože jsou složky σ^{ij} tenzoru napětí v rovnici (3.26) vyjádřeny vzhledem ke křivočaré kovariantní bázi, nejsou tyto složky obecně konstantní (srovnejme s vyjádřením (3.17) jednotkového tenzoru v kovariantní bázi), i když je pro tuto úlohu zadané konstantní pole napětí. Vektor napětí \mathbf{T} působící na plošku s jednotkovou normálou $\boldsymbol{\nu}$ můžeme rozložit do roviny plošky (smykové napětí) a do směru normály, Obr. 3.6. V tomto případě vektor \mathbf{T} působí pouze v tečném podprostoru, tedy

$$\sigma^{i3} = 0 = \sigma^{3i}, \quad i = 1, 2, 3.$$



Obrázek 3.6: Obecný vektor napětí v křivočarých souřadnicích

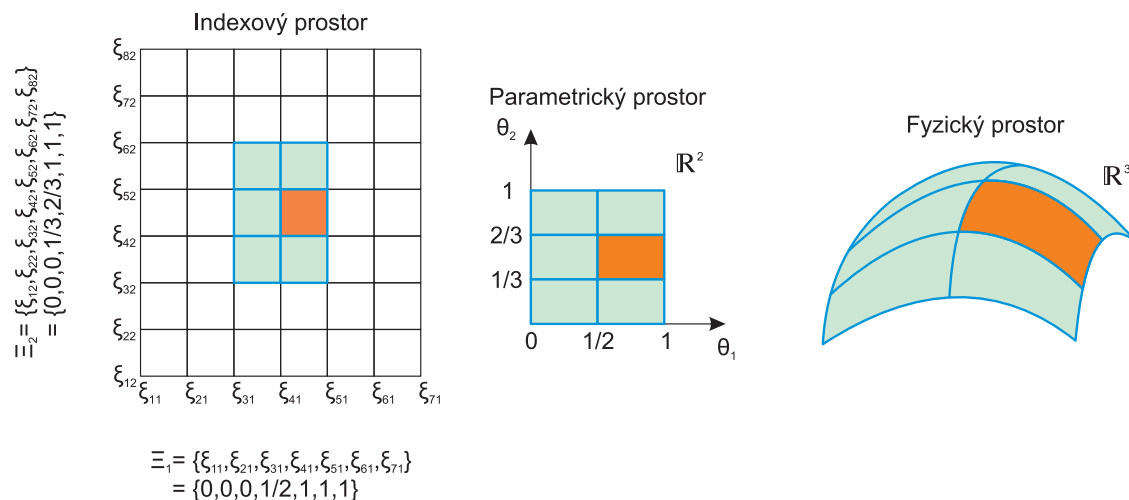
Kapitola 4

Isogeometrická analýza

Isogeometrická analýza (IA) založená na neuniformních racionálních B-spline (NURBS) reprezentacích objektů se objevuje v pracích [1], [5] jako jisté zobecnění metody konečných prvků (MKP) při řešení variační úlohy příslušné obyčejné, resp. parciální, diferenciální rovnice. Geometrie objektu je reprezentována stejnými bázovými funkcemi, které generují konečný podprostor prostoru řešení úlohy. NURBS reprezentace objektů umožňují popis i složitějších struktur a kuželosečky, kvadriky nebo anuloid reprezentují navíc přesně. Jak uvidíme v oddílu 4.2 zjemňování (ať již zvyšováním počtu prvků nebo stupně bázových funkcí) nemění původní geometrii vygenerovanou na „hrubších“ prvcích nebo nižších stupních. I když v MKP existují automatické generátory sítí, které ale potřebují řadu ručních zásahů, a proces vytváření sítě je časově náročný (odhaduje se, že až 80% času celkové analýzy problému), zjemnění sítě nebo designová změna objektu znamená značnou časovou ztrátu.

IA vznikla pro potřeby analýzy konstrukcí navržených prostřednictvím CAD systémů, které využívají převážně NURBS reprezentací objektů. Pokud provedeme triangulaci této vstupní geometrie, do výpočtu již vstupujeme s určitou chybou. Pro minimalizaci této vstupní odchylky je třeba zvýšit počet prvků triangulace, i když NURBS reprezentaci stačí třeba malý počet řídicích bodů. Podobně jako v MKP, NURBS bázové funkce mají lokální podporu a jejich nosič je kompaktní množina. IA je metoda poměrně mladá a její matematické vlastnosti vyžadují ještě řadu důkazů. Nejinak tomu bylo i u MKP, jejíž rozvoj nastal v 50. letech, kdy John Argyris na univerzitě ve Stuttgartu použil MKP pro návrh letadla a jeho strukturální analýzu. V 60. letech potom Ray Clough v Berkeley použil MKP ve stavebnictví. Přesné matematické formulace včetně jejího ověření se však MKP dočkala až v roce 1973 v publikaci [22].

4.1 NURBS křivky a plochy



Obrázek 4.1: Schematická souvislost mezi prostory

V tomto oddíle zavedeme B-spline a NURBS¹. Nejprve se zaměříme na sestavení B-spline bázových funkcí jedné proměnné a potom sestrojíme i báze pro funkce dvou proměnných. Z těchto bází odvodíme dále NURBS báze jedné i dvou proměnných. Obdobným způsobem se dospěje i k B-spline bázovým funkcím více proměnných.

Definice 4.1 Členy neklesající posloupnosti $n + p + 1$ čísel $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_{n+p+1}$ jsou souřadnicemi uzlového vektoru $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1})$, kde $\xi_i \in \mathbb{R}$ je i -tý uzel, $i = 1, 2, \dots, n + p + 1$. i -tou uzlovou roztečí rozumíme polootevřený interval $\langle \xi_i, \xi_{i+1} \rangle$.

B-spline bázové funkce proměnné θ stupně maximálně p definujeme na intervalu $\langle \xi_1, \xi_{n+p+1} \rangle$ rekurentně:

$$\begin{aligned}
 N_i^0(\theta) &= \begin{cases} 1 & \text{pokud } \xi_i \leq \theta < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{ve všech ostatních případech} \end{cases} \\
 N_i^j(\theta) &= \frac{\theta - \xi_i}{\xi_{i+j} - \xi_i} N_i^{j-1}(\theta) + \frac{\xi_{i+j+1} - \theta}{\xi_{i+j+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{j-1}(\theta), \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

kde $j = 1, \dots, p$. Protože souřadnice uzlového vektoru tvoří neklesající posloupnost, mohou se v rekurentních vzorcích (4.1) vyskytnout podíly typu $\frac{0}{0}$, ty pak položíme definitoricky rovny nule.

¹NURBS je zkratkou z anglického *non-uniform B-spline*.

Pro řídicí polygon $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^n$ bodů $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^d$, kde d značí dimenzi prostoru a je standardně 2 nebo 3, a proměnnou $\theta \in \langle \xi_{p+1}, \xi_{n+1} \rangle$ definujeme B-spline křivku v prostoru \mathbb{R}^d :

$$\mathbf{X}(\theta) = \sum_{i=1}^n N_i^p(\theta) \mathbf{P}_i.$$

Poznámka:

1. Zřejmě pro každé i, j, θ je $N_i^j(\theta) \geq 0$.
2. Pokud se uzel ξ_i opakuje k -krát, $1 \leq k \leq p+1$, B-spline bázové funkce mají v tomto bodě spojitost řádu $p-k$. Pokud je $p-k = -1$, pak je v tomto uzlu nespojitost bázových funkcí.
3. B-spline bázová funkce N_i^p je nezáporná na $\langle \xi_1, \xi_{n+p+1} \rangle$ a nenulová nejvýše na $p+1$ uzlových roztečích (ξ_i, ξ_{i+p+1}) , protože je lineární kombinací bázových funkcí stupně $p-1$. Tato vlastnost bývá označována jako *lokální podpora*. Změnou řídicího bodu \mathbf{P}_i se změní tvar části křivky odpovídající pouze intervalu (ξ_i, ξ_{i+p+1}) , zatímco mimo tento interval zůstane tvar křivky zachován.

◁

Příklad 1: Pomocí (4.1) sestavíme B-spline bázové funkce stupňů 0, 1, 2 a 3 pro uzlový vektor $\Xi = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$. Parametrické vyjádření je uvedeno v Tab. 4.1 a grafické na Obr. 4.2.

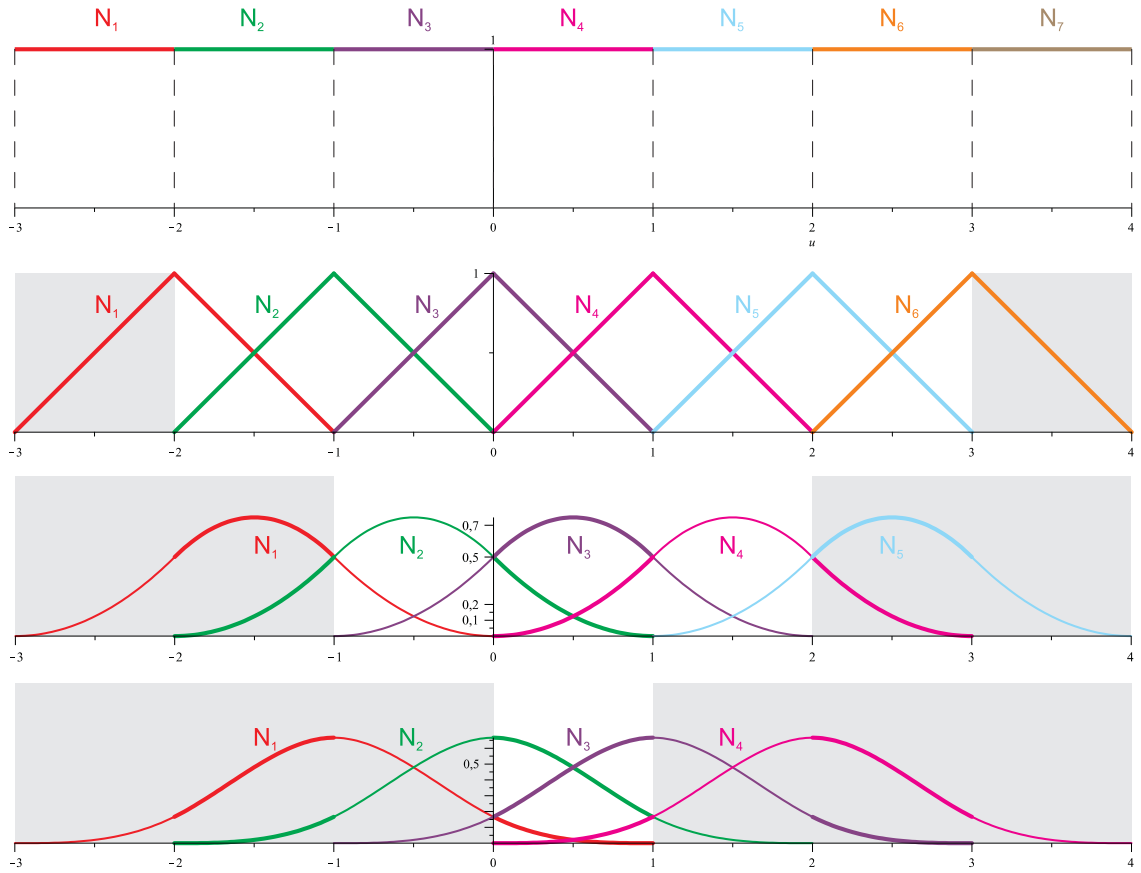
◁

Následující značení až na indexy kopíruje definici 4.1 a je ilustrováno Obr. 4.1.

Definice 4.2 Je dána řídicí síť $\mathcal{P} = \{P_{i_1, i_2}\}_{i_1=1, i_2=1}^{n_1, n_2}$ bodů $P_{i_1, i_2} \in \mathbb{R}^d$, kde d značí dimenzi prostoru a je standardně 3, stupně polynomů p_1, p_2 , a uzlové vektory $\Xi_1 = (\xi_{1,1}, \xi_{2,1}, \dots, \xi_{n_1+p_1+1,1})$, $\Xi_2 = (\xi_{1,2}, \xi_{2,2}, \dots, \xi_{n_2+p_2+1,2})$. Po částech polynomiální funkce $N_{i_1,1}^{p_1}(\theta_1)$, $N_{i_2,2}^{p_2}(\theta_2)$ jsou B-spline bázové funkce proměnných $\theta_1 \in \langle \xi_{p_1+1,1}, \xi_{n_1+1,1} \rangle$, $\theta_2 \in \langle \xi_{p_2+1,2}, \xi_{n_2+1,2} \rangle$, stupňů p_1, p_2 , odpovídající uzlovým vektorům Ξ_1, Ξ_2 .

B-spline plocha v prostoru \mathbb{R}^d je definována

$$\mathbf{X}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} N_{i_1,1}^{p_1}(\theta_1) N_{i_2,2}^{p_2}(\theta_2) P_{i_1, i_2}.$$



Obrázek 4.2: B-spline bázové funkce multého až 3. stupně (barva odpovídá i -té bázové funkci; segmenty jednotlivých bázových funkcí jsou zvýrazněny pravidelně se střídající různou tloušťkou; zašedlé části intervalu značí *pasivní* intervaly); $\Xi = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$

Definice 4.3 Necht' každému bodu řídicího polygonu $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^n$, $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^d$, odpovídá nezáporné reálné číslo w_i . Toto číslo označujeme jako váha. NURBS bázové funkce R_i^p stupně p proměnné θ definujeme jako:

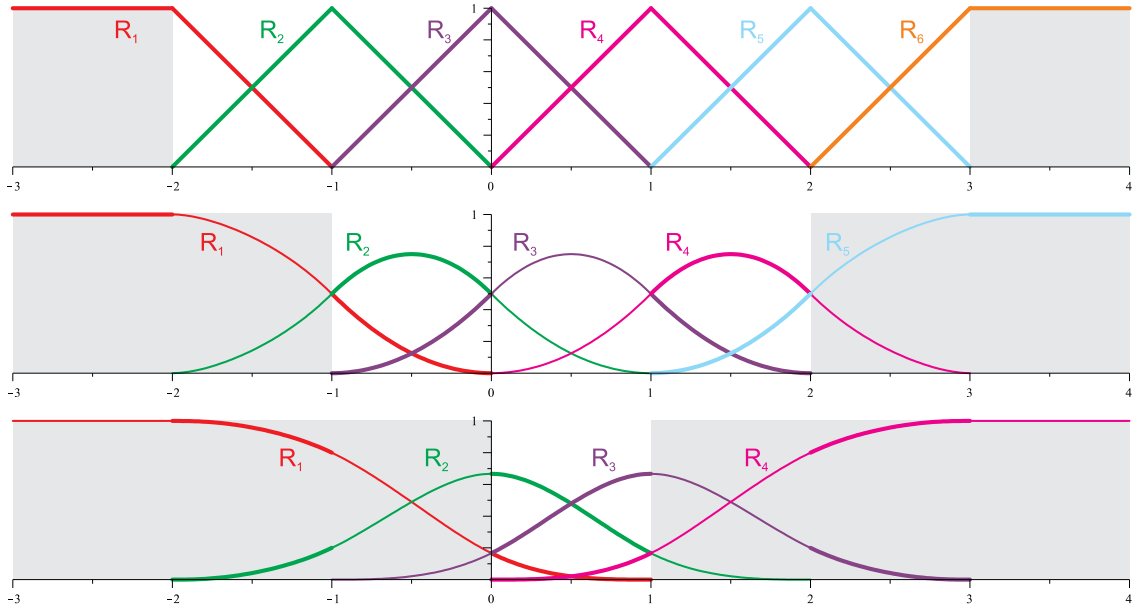
$$R_i^p(\theta) = \frac{N_i^p(\theta)w_i}{\sum_{j=1}^n N_j^p(\theta)w_j}, \quad (4.2)$$

kde $N_i^p(\theta)$, $i = 1, \dots, n$, jsou B-spline bázové funkce definované podle definice 4.1.

Pro řídicí polygon $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^n$, váhy w_i , $i = 1, \dots, n$, uzlový vektor $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1})$ a proměnnou $\theta \in \langle \xi_{p+1}, \xi_{n+1} \rangle$ definujeme NURBS křivku:

$$\mathbf{X}(\theta) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\theta)\mathbf{P}_i.$$

Příklad 2: Pomocí (4.2) sestavíme NURBS bázové funkce stupňů 0, 1, 2 a 3 pro uzlový vektor $\Xi = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$ a všechny váhy konstantně rovny 1. Parametrické vyjádření je uvedeno v Tab. 4.2 a grafické na Obr. 4.3. \triangleleft



Obrázek 4.3: NURBS bázové funkce 1. až 3. stupně (barva odpovídá i -té bázové funkci; segmenty jednotlivých bázových funkcí jsou zvýrazněny pravidelně se střídající různou tloušťkou; zašedlé části intervalu značí *pasivní* intervaly); $\Xi = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$, váhy konstantně rovny 1

Následující značení až na indexy kopíruje definici 4.3.

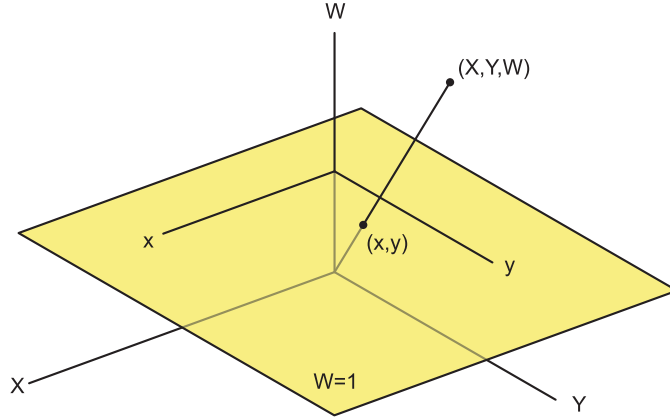
Definice 4.4 Je dána řídicí síť $\mathcal{P} = \{P_{i_1, i_2}\}_{i_1=1, i_2=1}^{n_1, n_2}$ bodů $P_{i_1, i_2} \in \mathbb{R}^d$, jejich váhy w_{i_1, i_2} , stupně polynomů p_1, p_2 , a uzlové vektory $\Xi_1 = (\xi_{1,1}, \xi_{2,1}, \dots, \xi_{n_1+p_1+1,1})$, $\Xi_2 = (\xi_{1,2}, \xi_{2,2}, \dots, \xi_{n_2+p_2+1,2})$. Zavedeme NURBS bázové funkce dvou proměnných

$$R_{i_1, i_2}^{p_1, p_2}(\theta_1, \theta_2) = \frac{N_{i_1, 1}^{p_1}(\theta_1) N_{i_2, 2}^{p_2}(\theta_2) w_{i_1, i_2}}{\sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} N_{j_1, 1}^{p_1}(\theta_1) N_{j_2, 2}^{p_2}(\theta_2) w_{i_1, i_2}}, \quad (4.3)$$

kde $N_{i_1, 1}^{p_1}(\theta_1)$, $N_{i_2, 2}^{p_2}(\theta_2)$ jsou B-spline bázové funkce proměnných $\theta_1 \in \langle \xi_{p_1+1,1}, \xi_{n_1+1,1} \rangle$, $\theta_2 \in \langle \xi_{p_2+1,2}, \xi_{n_2+1,2} \rangle$, stupňů p_1, p_2 , odpovídající uzlovým vektorům Ξ_1, Ξ_2 .

NURNS plocha je definována

$$\mathbf{X}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} R_{i_1, i_2}^{p_1, p_2}(\theta_1, \theta_2) P_{i_1, i_2}.$$



Obrázek 4.4: Homogenní souřadnice v \mathbb{R}^2

NURBS křivka, resp. plocha, v \mathbb{R}^d je projektivním zobrazením B-spline křivky, resp. plochy, v \mathbb{R}^{d+1} . Např. kuželosečky mohou být vytvořené projektivním zobrazením po částech kvadratických křivek. Každému bodu $\mathbf{P} = (x, y, z)$ trojrozměrného Eukleidovského prostoru \mathbb{R}^3 přiřadíme směr² $\mathbf{P}^w = (wx, wy, wz, w)$, $w \neq 0$, čtyřrozměrného prostoru (perspektivní zobrazení mezi nadrovinami v \mathbb{R}^4). Opačně každému směru $\mathbf{P}^w = (X, Y, Z, W)$ je přiřazen právě jeden bod $(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W})$, pokud $W \neq 0$. Druhá možnost, kdy $W = 0$, vede k zavedení nevlastních prvků, které přidáním k Eukleidovskému prostoru \mathbb{R}^3 vytvoří jeho projektivní rozšíření. Situace v \mathbb{R}^2 je zobrazena na Obr. 4.4. Nyní pro body $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^n$ řídicího polygonu a váhy $\{w_i\}_{i=1}^n$ sestavíme homogenní souřadnice $\mathbf{P}_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$. Pro uzlový vektor $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1})$ a řídicí polygon $\{\mathbf{P}_i^w\}_{i=1}^n$ definujeme B-spline křivku

$$\mathbf{X}^w(\theta) = \sum_{i=1}^n N_i^p(\theta) \mathbf{P}_i^w \quad (4.4)$$

stupně p proměnné θ podle definice 4.1. Z homogenních souřadnicových funkcí

$$\begin{aligned} X(\theta) &= \sum_{i=1}^n N_i^p(\theta) w_i x_i, & Y(\theta) &= \sum_{i=1}^n N_i^p(\theta) w_i y_i, \\ Z(\theta) &= \sum_{i=1}^n N_i^p(\theta) w_i z_i, & W(\theta) &= \sum_{i=1}^n N_i^p(\theta) w_i, \end{aligned}$$

vyjádříme pomocí perspektivního zobrazení Eukleidovské souřadnicové funkce

$$x(\theta) = \frac{X(\theta)}{W(\theta)} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i^p(\theta) w_i x_i}{\sum_{j=1}^n N_j^p(\theta) w_j},$$

²Pro daná x, y, z představují dvě různé nenulové hodnoty w, \bar{w} jeden směr.

$$y(\theta) = \frac{Y(\theta)}{W(\theta)} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i^p(\theta) w_i y_i}{\sum_{j=1}^n N_j^p(\theta) w_j},$$

$$z(\theta) = \frac{Z(\theta)}{W(\theta)} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i^p(\theta) w_i z_i}{\sum_{j=1}^n N_j^p(\theta) w_j},$$

a srovnáním s (4.2) vyjádříme NURBS křivku

$$\mathbf{X}(\theta) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^p(\theta) w_i}{\sum_{j=1}^n N_j^p(\theta) w_j} (x_i, y_i, z_i) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\theta) \mathbf{P}_i.$$

Ξ	$\langle -3, -2 \rangle$	$\langle -2, -1 \rangle$	$\langle -1, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 3, 4 \rangle$
N_1^0	1	0	0	0	0	0	0
N_2^0	0	1	0	0	0	0	0
N_3^0	0	0	1	0	0	0	0
N_4^0	0	0	0	1	0	0	0
N_5^0	0	0	0	0	1	0	0
N_6^0	0	0	0	0	0	1	0
N_7^0	0	0	0	0	0	0	1
N_1^1	$\theta + 3$	$-\theta - 1$	0	0	0	0	0
N_2^1	0	$\theta + 2$	$-\theta$	0	0	0	0
N_3^1	0	0	$\theta + 1$	$-\theta + 1$	0	0	0
N_4^1	0	0	0	θ	$-\theta + 2$	0	0
N_5^1	0	0	0	0	$\theta - 1$	$-\theta + 3$	0
N_6^1	0	0	0	0	0	$\theta - 2$	$-\theta + 4$
N_1^2	$\frac{1}{2}(\theta + 3)^2$	$-\theta^2 - 3\theta - \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}\theta^2$	0	0	0	0
N_2^2	0	$\frac{1}{2}(\theta + 2)^2$	$-\theta^2 - \theta + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(\theta - 1)^2$	0	0	0
N_3^2	0	0	$\frac{1}{2}(\theta + 1)^2$	$-\theta^2 + \theta + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(\theta - 2)^2$	0	0
N_4^2	0	0	0	$\frac{1}{2}\theta^2$	$-\theta^2 + 3\theta - \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}(\theta - 3)^2$	0
N_5^2	0	0	0	0	$\frac{1}{2}(\theta - 1)^2$	$-\theta^2 + 5\theta - \frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}(\theta - 4)^2$
N_1^3	$\frac{1}{6}(\theta + 3)^3$	$-\frac{1}{2}\theta^3 - \frac{5}{2}\theta^2 - \frac{7}{2}\theta - \frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}\theta^3 + \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}(\theta - 1)^3$	0	0	0
N_2^3	0	$\frac{1}{6}(\theta + 2)^3$	$-\frac{1}{2}\theta^3 - \theta^2 + \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}\theta^3 - \theta^2 + \frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}(\theta - 2)^3$	0	0
N_3^3	0	0	$\frac{1}{6}(\theta + 1)^3$	$-\frac{1}{2}\theta^3 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\theta^3 - \frac{5}{2}\theta^2 + \frac{7}{2}\theta - \frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}(\theta - 3)^3$	0
N_4^3	0	0	0	$\frac{1}{6}\theta^3$	$-\frac{1}{2}\theta^3 + 2\theta^2 - 2\theta + \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}\theta^3 - 4\theta^2 + 10\theta - \frac{22}{3}$	$-\frac{1}{6}(\theta - 4)^3$

Tabulka 4.1: B-spline bázové funkce

Ξ	$\langle -3, -2 \rangle$	$\langle -2, -1 \rangle$	$\langle -1, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 3, 4 \rangle$
R_1^0	1	0	0	0	0	0	0
R_2^0	0	1	0	0	0	0	0
R_3^0	0	0	1	0	0	0	0
R_4^0	0	0	0	1	0	0	0
R_5^0	0	0	0	0	1	0	0
R_6^0	0	0	0	0	0	1	0
R_7^0	0	0	0	0	0	0	1
R_1^1	1	$-\theta - 1$	0	0	0	0	0
R_2^1	0	$\theta + 2$	$-\theta$	0	0	0	0
R_3^1	0	0	$\theta + 1$	$-\theta + 1$	0	0	0
R_4^1	0	0	0	θ	$-\theta + 2$	0	0
R_5^1	0	0	0	0	$\theta - 1$	$-\theta + 3$	0
R_6^1	0	0	0	0	0	$\theta - 2$	1
R_1^2	1	$\frac{2\theta^2+6\theta+3}{\theta^2+2\theta-1}$	$\frac{1}{2}\theta^2$	0	0	0	0
R_2^2	0	$-\frac{(\theta+2)^2}{\theta^2+2\theta-1}$	$-\theta^2 - \theta + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(\theta - 1)^2$	0	0	0
R_3^2	0	0	$\frac{1}{2}(\theta + 1)^2$	$-\theta^2 + \theta + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(\theta - 2)^2$	0	0
R_4^2	0	0	0	$\frac{1}{2}\theta^2$	$-\theta^2 + 3\theta - \frac{3}{2}$	$-\frac{(\theta-3)^2}{\theta^2-4\theta+2}$	0
R_5^2	0	0	0	0	$\frac{1}{2}(\theta - 1)^2$	$\frac{2\theta^2-10\theta+11}{\theta^2-4\theta+2}$	1
R_1^3	1	$\frac{3\theta^3+15\theta^2+21\theta+5}{2\theta^3+9\theta^2+9\theta-3}$	$\frac{3\theta^3+3\theta^2-3\theta+1}{\theta^3+6}$	$-\frac{1}{6}(\theta - 1)^3$	0	0	0
R_2^3	0	$-\frac{(\theta+2)^3}{2\theta^3+9\theta^2+9\theta-3}$	$-\frac{3\theta^3+6\theta^2-4}{\theta^3+6}$	$\frac{1}{2}\theta^3 - \theta^2 + \frac{2}{3}$	$\frac{(\theta-2)^3}{\theta^3-3\theta^2+3\theta-7}$	0	0
R_3^3	0	0	$\frac{(\theta+1)^3}{\theta^3+6}$	$-\frac{1}{2}\theta^3 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{6}$	$-\frac{3\theta^3-15\theta^2+21\theta-5}{\theta^3-3\theta^2+3\theta-7}$	$-\frac{(\theta-3)^3}{2\theta^3-15\theta^2+33\theta-17}$	0
R_4^3	0	0	0	$\frac{1}{6}\theta^3$	$\frac{3\theta^3-12\theta^2+12\theta-4}{\theta^3-3\theta^2+3\theta-7}$	$\frac{3\theta^3-24\theta^2+60\theta-44}{2\theta^3-15\theta^2+33\theta-17}$	1

Tabulka 4.2: NURBS bázové funkce

4.2 Zjemňování NURBS bázových funkcí

Podobně jako u zjemňování v metodě konečných prvků se v tomto oddíle zaměříme na způsoby zjemňování B-spline bázových funkcí a na následné využití těchto zjemněných B-spline bázových funkcí pro zjemňování NURBS bázových funkcí. V literatuře jsou podklady k této pasáži „roztroušené“ v různých článcích a publikacích. Nemałym cílem této kapitoly je tedy poskytnout jejich ucelený a provázaný souhrn doplněný o vlastní důkazy, pokud důkaz v původní literatuře chyběl nebo pokud byl proveden pouze náznak důkazu. Věty a důkazy jsou přizpůsobeny značení a indexům zavedeným v této práci. Klíčové důkazy jsou uvedeny v plné šíři hlavně proto, že algoritmy v nich uvedené se používají při praktických výpočtech.

4.2.1 Vkládání uzlů

Dělení (nebo půlení) intervalů (průměru h) ve standardních definicích konečných prvků (např. „střechy“) odpovídá vkládání nových uzlů do uzlového vektoru. Proto se pro tento typ zjemnění používá termín *h-zjemnění*. Nejprve ukážeme vložení jednoho uzlu pro B-spline křivku (analogicky se vloží více uzlů) a poté postup zobecníme na NURBS křivku. Konkrétní počítačové algoritmy pro vkládání uzlů se stále vylepšují, aby byl výpočet jemnějších křivek, ploch nebo těles rychlejší.

Mějme B-spline křivku $\mathbf{X}(\theta) = \sum_{i=1}^n N_i^p(\theta) \mathbf{P}_i$ stupně p proměnné θ , definovanou pro uzlový vektor $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1})$ a řídicí polygon $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^n$ podle definice 4.1.

Do uzlové rozteče (ξ_k, ξ_{k+1}) , $\xi_k < \xi_{k+1}$, vložme uzel $\hat{\xi} \in (\xi_k, \xi_{k+1})$ a vytvořme tak uzlový vektor

$$\hat{\Xi} = (\hat{\xi}_1 = \xi_1, \dots, \hat{\xi}_k = \xi_k, \hat{\xi}_{k+1} = \hat{\xi}, \hat{\xi}_{k+2} = \xi_{k+1}, \dots, \hat{\xi}_{n+1+p+1} = \xi_{n+p+1}).$$

Označme \mathcal{V}_{Ξ} , resp. $\mathcal{V}_{\hat{\Xi}}$, vektorové prostory B-spline křivek definovaných na uzlové rozteči Ξ , resp. $\hat{\Xi}$. Protože $\Xi \subset \hat{\Xi}$ je zřejmě $\mathcal{V}_{\Xi} \subset \mathcal{V}_{\hat{\Xi}}$ a $\dim(\mathcal{V}_{\Xi}) + 1 = \dim(\mathcal{V}_{\hat{\Xi}})$. Přidáním uzlu se nezmění geometrický tvar křivky $\mathbf{X}(\theta)$ ani její parametrizace. Porovnáním parametrických vyjádření

$$\sum_{i=1}^n N_i^p(\theta) \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{N}_i^p(\theta) \mathbf{Q}_i,$$

a dosazením $n+1$ vhodných θ do obou stran rovnosti, vzhledem k bázovým funkcím stejného stupně p získáme regulární (v tomto případě i pásovou) soustavu $n+1$ rovnic pro $n+1$ neznámých \mathbf{Q}_i .

Věta 4.1 Pro báze B-spline funkce $N_i^p(\theta)$, $i = 1, \dots, n$, $\hat{N}_j^p(\theta)$, $j = 1, \dots, n+1$, stupně p , proměnné θ a definované na nosičích Ξ , $\hat{\Xi}$ platí následující vztah:

$$N_i^p(\theta) = \begin{cases} \hat{N}_i^p(\theta) & 1 \leq i \leq k-p-1 \\ \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_i}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_i} \hat{N}_i^p(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}_{i+1}} \hat{N}_{i+1}^p(\theta) & k-p \leq i \leq k \\ \hat{N}_{i+1}^p(\theta) & k+1 \leq i \leq n \end{cases}. \quad (4.5)$$

Důkaz: Protože se v literatuře důkaz zřejmě kvůli jeho grafické náročnosti prakticky nevyskytuje, je zde představen alespoň vlastní náznak možného důkazu. Úvahu provedeme indukcí přes stupeň p B-spline báze funkcí. Pro $p = 0$ a zjednodušeně zapsaný uzlový vektor $\hat{\Xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k, \hat{\xi}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+p+1})$ je $N_i^0(\theta) = \hat{N}_i^0(\theta)$, pro $i \in \{1, \dots, k\}$, protože jsou uzly ξ_i shodné s uzly $\hat{\xi}_i$. Podobně $N_i^0(\theta) = \hat{N}_{i+1}^0(\theta)$, pro $i \in \{k+1, \dots, n+p+1\}$.

Pro $i = k$ jsou nenulové pouze:

$$\begin{aligned} N_k^0(\theta) &= 1 & \text{na } \xi_k \leq \theta < \xi_{k+1}, \\ \hat{N}_k^0(\theta) &= 1 & \text{na } \xi_k \leq \theta < \hat{\xi}, \\ \hat{N}_{k+1}^0(\theta) &= 1 & \text{na } \hat{\xi} \leq \theta < \xi_{k+1}, \end{aligned}$$

což odpovídá (4.5) pro $p = 0$, když si uvědomíme rovnost $\hat{\xi}_{k+1} = \hat{\xi}$.

Vyjádríme $N_i^p(\theta)$ pro $p > 0$ a předpokládáme, že (4.5) platí pro $p-1$. Rozepsáním

$$N_i^p(\theta) = \frac{\theta - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_i^{p-1}(\theta) + \frac{\xi_{i+p+1} - \theta}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(\theta) \quad (4.6)$$

snížíme stupeň a upravíme v závislosti na i .

Pro $1 \leq i \leq k-p-1$ je (4.6):

$$\frac{\theta - \hat{\xi}_i}{\hat{\xi}_{i+p} - \hat{\xi}_i} \hat{N}_i^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{i+p+1} - \theta}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_{i+1}} \hat{N}_{i+1}^{p-1}(\theta) = \hat{N}_i^p(\theta).$$

Pro $i = k-p$ nastávají rovnosti uzlů $\xi_i = \hat{\xi}_i$, $\xi_{i+1} = \hat{\xi}_{i+1}$, $\xi_{i+p} = \hat{\xi}_{i+p}$, $\xi_{i+p+1} = \hat{\xi}_{i+p+2}$, a (4.6) je:

$$\frac{\theta - \hat{\xi}_{k-p}}{\hat{\xi}_k - \hat{\xi}_{k-p}} \hat{N}_{k-p}^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{k+2} - \theta}{\hat{\xi}_{k+2} - \hat{\xi}_{k-p+1}} \left[\frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_{k-p+1}}{\hat{\xi}_{k+1} - \hat{\xi}_{k-p+1}} \hat{N}_{k-p+1}^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{k+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{k+2} - \hat{\xi}_{k-p+2}} \hat{N}_{k-p+2}^{p-1} \right].$$

Postupnými úpravami s využitím rovností $\frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_{k-p+1}}{\hat{\xi}_{k+1} - \hat{\xi}_{k-p+1}} = 1$, $\frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_{k-p}}{\hat{\xi}_{k+1} - \hat{\xi}_{k-p}} = 1$ dostáváme:

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_{k-p}}{\hat{\xi}_{k+1} - \hat{\xi}_{k-p}} \left[\frac{\theta - \hat{\xi}_{k-p}}{\hat{\xi}_k - \hat{\xi}_{k-p}} \hat{N}_{k-p}^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{k+1} - \theta}{\hat{\xi}_{k+1} - \hat{\xi}_{k-p+1}} \hat{N}_{k-p+1}^{p-1}(\theta) \right] + \\ & + \frac{\hat{\xi}_{k+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{k+2} - \hat{\xi}_{k-p+1}} \left[\frac{\theta - \hat{\xi}_{k-p+1}}{\hat{\xi}_{k+1} - \hat{\xi}_{k-p+1}} \hat{N}_{k-p+1}^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{k+2} - \theta}{\hat{\xi}_{k+2} - \hat{\xi}_{k-p+2}} \hat{N}_{k-p+2}^{p-1}(\theta) \right] = \\ & = \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_{k-p}}{\hat{\xi}_{k+1} - \hat{\xi}_{k-p}} \hat{N}_{k-p}^p(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{k+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{k+2} - \hat{\xi}_{k-p+1}} \hat{N}_{k-p+1}^p(\theta). \end{aligned}$$

Pro $i = k$ nastávají rovnosti uzlů $\xi_i = \hat{\xi}_i$, $\xi_{i+1} = \hat{\xi}_{i+2}$, $\xi_{i+p} = \hat{\xi}_{i+p+1}$, $\xi_{i+p+1} = \hat{\xi}_{i+p+2}$, a (4.6) je:

$$\frac{\theta - \hat{\xi}_k}{\hat{\xi}_{k+p+1} - \hat{\xi}_k} \left[\frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_k}{\hat{\xi}_{k+p} - \hat{\xi}_k} \hat{N}_k^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{k+p+1} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{k+p+1} - \hat{\xi}_{k+1}} \hat{N}_{k+1}^{p-1}(\theta) \right] + \frac{\hat{\xi}_{k+p+2} - \theta}{\hat{\xi}_{k+p+2} - \hat{\xi}_{k+2}} \hat{N}_{k+2}^{p-1}(\theta).$$

Postupnými úpravami s využitím rovností $\frac{\hat{\xi}_{k+p+1} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{k+p+1} - \hat{\xi}_{k+1}} = 1$, $\frac{\hat{\xi}_{k+p+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{k+p+2} - \hat{\xi}_{k+1}} = 1$ dostáváme:

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_k}{\hat{\xi}_{k+p+1} - \hat{\xi}_k} \left[\frac{\theta - \hat{\xi}_k}{\hat{\xi}_{k+p} - \hat{\xi}_k} \hat{N}_k^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{k+p+1} - \theta}{\hat{\xi}_{k+p+1} - \hat{\xi}_{k+1}} \hat{N}_{k+1}^{p-1}(\theta) \right] + \\ & + \frac{\hat{\xi}_{k+p+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{k+p+2} - \hat{\xi}_{k+1}} \left[\frac{\theta - \hat{\xi}_{k+1}}{\hat{\xi}_{k+p+1} - \hat{\xi}_{k+1}} \hat{N}_{k+1}^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{k+p+2} - \theta}{\hat{\xi}_{k+p+2} - \hat{\xi}_{k+2}} \hat{N}_{k+2}^{p-1}(\theta) \right] = \\ & = \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_k}{\hat{\xi}_{k+p+1} - \hat{\xi}_k} \hat{N}_k^p(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{k+p+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{k+p+2} - \hat{\xi}_{k+1}} \hat{N}_{k+1}^p(\theta). \end{aligned}$$

Pro $k+1 \leq i \leq n$ je (4.6):

$$\frac{\theta - \hat{\xi}_{i+1}}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_{i+1}} \hat{N}_{i+1}^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{i+p+2} - \theta}{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}_{i+2}} \hat{N}_{i+2}^{p-1}(\theta) = \hat{N}_{i+1}^p(\theta).$$

Pokud je $p \geq 2$, pro $k-p+1 \leq i \leq k-1$ nastává varianta (4.6):

$$\begin{aligned} & \frac{\theta - \xi_i}{\hat{\xi}_{i+p} - \xi_i} \left[\frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_i}{\hat{\xi}_{i+p} - \hat{\xi}_i} \hat{N}_i^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_{i+1}} \hat{N}_{i+1}^{p-1}(\theta) \right] + \\ & + \frac{\xi_{i+p+1} - \theta}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left[\frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_{i+1}}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_{i+1}} \hat{N}_{i+1}^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}_{i+2}} \hat{N}_{i+2}^{p-1}(\theta) \right]. \end{aligned}$$

Postupnými úpravami s využitím rovnosti uzlů $\xi_i = \hat{\xi}_i$, $\xi_{i+1} = \hat{\xi}_{i+1}$, $\xi_{i+p} = \hat{\xi}_{i+p+1}$, $\xi_{i+p+1} = \hat{\xi}_{i+p+2}$ dostáváme:

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_i}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_i} \left[\frac{\theta - \hat{\xi}_i}{\hat{\xi}_{i+p} - \hat{\xi}_i} \hat{N}_i^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{i+p+1} - \theta}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_{i+1}} \hat{N}_{i+1}^{p-1}(\theta) \right] + \\ & + \frac{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}_{i+1}} \left[\frac{\theta - \hat{\xi}_{i+1}}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_{i+1}} \hat{N}_{i+1}^{p-1}(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{i+p+2} - \theta}{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}_{i+2}} \hat{N}_{i+2}^{p-1}(\theta) \right] = \\ & = \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_i}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_i} \hat{N}_i^p(\theta) + \frac{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}_{i+1}} \hat{N}_{i+1}^p(\theta). \end{aligned}$$

Tím jsme vyčerpali všechna přípustná i a důkaz je hotov. \square

V důsledku této věty můžeme zformulovat následující:

Věta 4.2 (*Boehmův algoritmus*) *Parametrické vyjádření B-spline křivky $\mathbf{X}(\theta)$ vzhledem k uzlovému vektoru $\hat{\Xi}$ je*

$$\mathbf{X}(\theta) = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{N}_i^p(\theta) \hat{\mathbf{P}}_i,$$

kde

$$\hat{\mathbf{P}}_i = \begin{cases} \mathbf{P}_i & 1 \leq i \leq k-p \\ (1 - \alpha_i) \mathbf{P}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{P}_i & k-p+1 \leq i \leq k \\ \mathbf{P}_{i-1} & k+1 \leq i \leq n+1 \end{cases}, \quad (4.7)$$

$$\alpha_i = \frac{\hat{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} = \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_i}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_i}. \quad (4.8)$$

Důkaz: Důkaz můžeme najít např. v [12], str. 209. Vzhledem k tomu, že báze funkce i parametrické vyjádření B-spline křivky, které se vyskytují v důkazu, jsou závislé na stejné proměnné θ , nebudeme ji psát. Dále v důkazu využíváme fakt, že

$$\hat{\xi} = \hat{\xi}_{k+1}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \sum_{i=1}^n N_i^p \mathbf{P}_i = \\
&= \sum_{i=1}^{k-p-1} \hat{N}_i^p \mathbf{P}_i + \sum_{i=k-p}^k \left(\frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_i}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_i} \hat{N}_i^p + \frac{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}_{i+1}} \hat{N}_{i+1}^p \right) \mathbf{P}_i + \\
&\quad + \sum_{i=k+1}^n \hat{N}_{i+1}^p \mathbf{P}_i = \\
&= \sum_{i=1}^{k-p-1} \hat{N}_i^p \mathbf{P}_i + \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_{k-p}}{\hat{\xi}_{k+1} - \hat{\xi}_{k-p}} \hat{N}_{k-p}^p \mathbf{P}_{k-p} + \sum_{i=k-p+1}^k \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_i}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_i} \hat{N}_i^p \mathbf{P}_i + \\
&\quad + \sum_{i=k-p}^{k-1} \frac{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{i+p+2} - \hat{\xi}_{i+1}} \hat{N}_{i+1}^p \mathbf{P}_i + \frac{\hat{\xi}_{k+p+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{k+p+2} - \hat{\xi}_{k+1}} \hat{N}_{k+1}^p \mathbf{P}_k + \sum_{i=k+1}^n \hat{N}_{i+1}^p \mathbf{P}_i = \\
&= \sum_{i=1}^{k-p-1} \hat{N}_i^p \mathbf{P}_i + \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_{k-p}}{\hat{\xi}_{k+1} - \hat{\xi}_{k-p}} \hat{N}_{k-p}^p \mathbf{P}_{k-p} + \sum_{i=k-p+1}^k \left(\frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_i}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_i} \mathbf{P}_i + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{i+p+1} - \hat{\xi}_i} \mathbf{P}_{i-1} \right) \hat{N}_i^p + \frac{\hat{\xi}_{k+p+2} - \hat{\xi}}{\hat{\xi}_{k+p+2} - \hat{\xi}_{k+1}} \hat{N}_{k+1}^p \mathbf{P}_k + \sum_{i=k+1}^n \hat{N}_{i+1}^p \mathbf{P}_i = \\
&= \sum_{i=1}^{k-p} \hat{N}_i^p \mathbf{P}_i + \sum_{i=k-p+1}^k [\alpha_i \mathbf{P}_i + (1 - \alpha_i) \mathbf{P}_{i-1}] \hat{N}_i^p + \sum_{i=k}^n \hat{N}_{i+1}^p \mathbf{P}_i
\end{aligned}$$

□

Příklad 3: Do uzlového vektoru $\Xi = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$ vložme uzel $\hat{\xi} = \frac{1}{2}$. Pro původní vrcholy řídicího polygonu

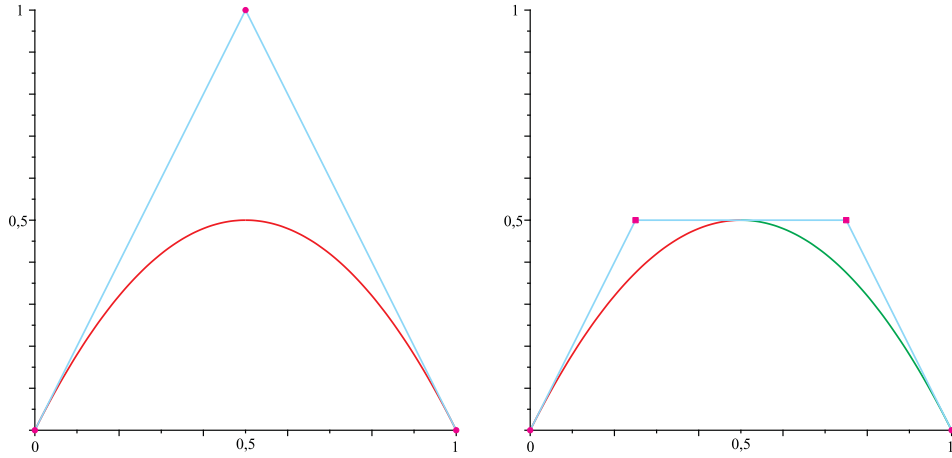
$$\mathbf{P}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{P}_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \mathbf{P}_3 = (1, 0)$$

dopočteme podle (4.7) nové vrcholy řídicího polygonu

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = (0, 0), \quad \hat{\mathbf{P}}_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad \hat{\mathbf{P}}_3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad \hat{\mathbf{P}}_4 = (1, 0).$$

Původní parametrické vyjádření

$$\mathbf{X}(\theta) = (\theta, -2\theta^2 + 2\theta)$$



Obrázek 4.5: Vložení uzlu

ani geometrie, Obr. 4.5, takto zadané křivky se nemění. ◀

Pro vložení většího počtu uzlů, řekněme m , můžeme definovat funkce vycházející z předchozích dvou vět vytvořením rekurentní funkce (odpovídá hodnotám α_i z předchozí věty pro jednotlivá vložení). Přidáváme-li vícenásobné uzly a chceme-li zachovat geometrii a parametrické vyjádření původní křivky, hlídáme jejich násobnost, aby se nesnížil řád spojitosti.

Při vkládání uzlu $\hat{\xi}$ do uzlového vektoru Ξ NURBS křivky \mathbf{X} postupujeme tak, že NURBS křivku zobrazíme perspektivním zobrazením na B-spline křivku \mathbf{X}^w v prostoru o jednu dimenzi větším, provedeme vložení uzlu podle věty 4.2 a zobrazíme inverzním perspektivním zobrazením.

Příklad 4: Pro praktickou ukázkou vkládání uzlu do uzlového vektoru NURBS křivky v \mathbb{R}^2 (přesněji kružnice) stupně $p = 2$ zvolme uzlový vektor

$$\Xi = \left(0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1 \right),$$

řídící polygon $\mathbf{P}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{P}_2 = (1, 1)$, $\mathbf{P}_3 = (-1, 1)$, $\mathbf{P}_4 = (-1, 0)$, $\mathbf{P}_5 = (-1, -1)$, $\mathbf{P}_6 = (1, -1)$, $\mathbf{P}_7 = (1, 0)$ a váhy $\mathbf{w} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$. Tyto podmínky určují kružnici se středem $(0, 0)$, poloměrem 1 a parametrickým vyjádřením

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\theta) &= \left(-\frac{4\theta - 1}{8\theta^2 - 4\theta + 1}, -\frac{4(2\theta - 1)\theta}{8\theta^2 - 4\theta + 1} \right), & \theta \in \left[0, \frac{1}{2} \right), \\ \mathbf{X}(\theta) &= \left(\frac{4\theta - 3}{8\theta^2 - 12\theta + 5}, \frac{4(2\theta^2 - 3\theta + 1)}{8\theta^2 - 12\theta + 5} \right), & \theta \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Vynásobením souřadnic bodů řídicího polygonu jejich váhou získáme jejich homogenní souřadnice a odpovídající B-spline křivku v \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1 &= (1, 0) & w_1 &= 1 & \mathbf{P}_1^w &= (1, 0, 1) \\
\mathbf{P}_2 &= (1, 1) & w_2 &= \frac{1}{2} & \mathbf{P}_2^w &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\mathbf{P}_3 &= (-1, 1) & w_3 &= \frac{1}{2} & \mathbf{P}_3^w &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\mathbf{P}_4 &= (-1, 0) & w_4 &= 1 & \mathbf{P}_4^w &= (-1, 0, 1) \\
\mathbf{P}_5 &= (-1, -1) & w_5 &= \frac{1}{2} & \mathbf{P}_5^w &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\mathbf{P}_6 &= (1, -1) & w_6 &= \frac{1}{2} & \mathbf{P}_6^w &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\mathbf{P}_7 &= (1, 0) & w_7 &= 1 & \mathbf{P}_7^w &= (1, 0, 1).
\end{aligned}$$

Do uzlového vektoru Ξ vložíme hodnoty $\hat{\xi} = \frac{1}{4}$, $\hat{\xi} = \frac{3}{4}$ a získáme uzlový vektor $\hat{\Xi} = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1)$, pro který dopočteme nové vrcholy řídicího polygonu podle (4.7) a přejdeme od homogenních souřadnic zpět

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{P}}_1^w = \mathbf{P}_1^w &= (1, 0, 1) & \hat{\mathbf{P}}_1 &= (1, 0) & \hat{w}_1 &= 1 \\
\hat{\mathbf{P}}_2^w = \mathbf{P}_2^w &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \hat{\mathbf{P}}_2 &= (1, 1) & \hat{w}_2 &= \frac{1}{2} \\
\hat{\mathbf{P}}_3^w = (1 - \alpha_3)\mathbf{P}_2^w + \alpha_3\mathbf{P}_3^w &= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \hat{\mathbf{P}}_3 &= (0, 1) & \hat{w}_3 &= \frac{1}{2} \\
\hat{\mathbf{P}}_4^w = (1 - \alpha_4)\mathbf{P}_3^w + \alpha_4\mathbf{P}_4^w &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \hat{\mathbf{P}}_4 &= (-1, 1) & \hat{w}_4 &= \frac{1}{2} \\
\hat{\mathbf{P}}_5^w = \mathbf{P}_4^w &= (-1, 0, 1) & \hat{\mathbf{P}}_5 &= (-1, 0) & \hat{w}_5 &= 1 \\
\hat{\mathbf{P}}_6^w = \mathbf{P}_5^w &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \hat{\mathbf{P}}_6 &= (-1, -1) & \hat{w}_6 &= \frac{1}{2} \\
\hat{\mathbf{P}}_7^w = (1 - \alpha_6)\mathbf{P}_5^w + \alpha_6\mathbf{P}_6^w &= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \hat{\mathbf{P}}_7 &= (0, -1) & \hat{w}_7 &= \frac{1}{2} \\
\hat{\mathbf{P}}_8^w = (1 - \alpha_7)\mathbf{P}_6^w + \alpha_7\mathbf{P}_7^w &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \hat{\mathbf{P}}_8 &= (1, -1) & \hat{w}_8 &= \frac{1}{2} \\
\hat{\mathbf{P}}_9^w = \mathbf{P}_7^w &= (1, 0, 1) & \hat{\mathbf{P}}_9 &= (1, 0) & \hat{w}_9 &= 1,
\end{aligned}$$

kde $\alpha_3 = \frac{1}{2} = \alpha_6$ a $\alpha_4 = 0 = \alpha_7$. Výsledné řídicí polygony můžeme porovnat na Obr. 4.6, Obr. 4.7 a Obr. 4.8. Parametrizace je shodná s (4.9).

Když se zaměříme na souřadnice uzlového vektoru, nevložili jsme žádné nové hodnoty, jen jsme zvýšili násobnost dvou uzlů. Přesto se ale zvětšil počet bodů řídicího polygonu a tím i možnosti ovlivnit tvar křivky.

Pro zajímavost ještě nabídneme další NURBS křivku $\tilde{\mathbf{X}}(\theta)$, která má s předchozí shodný uzlový vektor $\hat{\Xi}$ i řídicí polygon $\{\hat{\mathbf{P}}\}_{i=1}^9$, ale odlišné váhy

$$\tilde{\mathbf{w}} = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right),$$

a tím pádem jinou rovnicí:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}}(\theta) &= \left(-\frac{\sqrt{2}(4\theta-1)(4\theta+1+\sqrt{2})}{32\theta^2-8\theta+2+\sqrt{2}}, -\frac{4\sqrt{2}(4\theta-2-\sqrt{2})\theta}{32\theta^2-8\theta+2+\sqrt{2}} \right), \quad \theta \in \left[0, \frac{1}{4}\right), \\ \tilde{\mathbf{X}}(\theta) &= \left(\frac{\sqrt{2}(4\theta-1)(4\theta-3-\sqrt{2})}{32\theta^2-24\theta+6+\sqrt{2}}, -\frac{2\sqrt{2}(4\theta+\sqrt{2})(2\theta-1)}{32\theta^2-24\theta+6+\sqrt{2}} \right), \quad \theta \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \\ \tilde{\mathbf{X}}(\theta) &= \left(\frac{\sqrt{2}(4\theta-1+\sqrt{2})(4\theta-3)}{32\theta^2-40\theta+14+\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}(4\theta-4-\sqrt{2})(2\theta-1)}{32\theta^2-40\theta+14+\sqrt{2}} \right), \quad \theta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \\ \tilde{\mathbf{X}}(\theta) &= \left(-\frac{\sqrt{2}(4\theta-3)(4\theta-5-\sqrt{2})}{32\theta^2-56\theta+26+\sqrt{2}}, \frac{4\sqrt{2}(4\theta-2+\sqrt{2})(\theta-1)}{32\theta^2-56\theta+26+\sqrt{2}} \right), \quad \theta \in \left[\frac{3}{4}, 1\right).\end{aligned}$$

Nejedná se tedy o zjemnění, jak jsme ho zavedli výše. \triangleleft

Poznámka: V následujícím pododdíle odvodíme tvrzení pro *ukotvené* B-spline, resp. NURNS, křivky a plochy. Pro uzlový vektor ukotvené křivky platí, že se prvních $p+1$ uzlů shoduje a posledních $p+1$ uzlů shoduje. Tedy

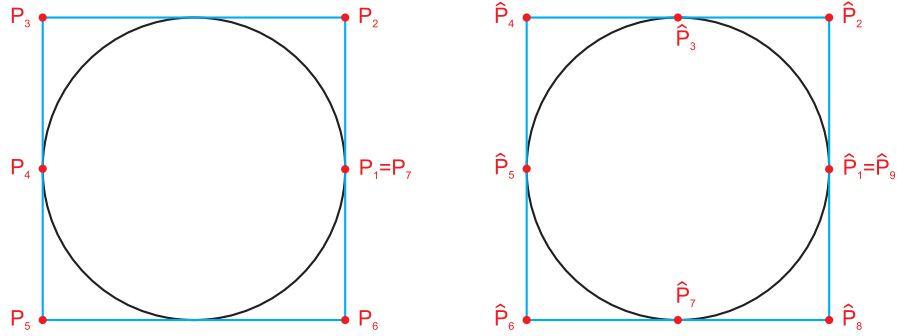
$$\Xi = \left(\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \underbrace{\xi_1, \dots, \xi_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{\xi_s, \dots, \xi_s}_{m_s}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right),$$

kde $\{a, \xi_1, \dots, \xi_s, b\}$ tvoří rostoucí posloupnost, uzly ξ_i , $i = 1, \dots, s$, nazýváme vnitřní. Přirozená čísla m_i , $i = 1, \dots, s$, určují násobnost vnitřních uzlů a p je stupeň bázevých B-spline funkcí. Důsledkem toho vzniká na začátku a na konci p uzlových roztečí nulové délky a ukotvená křivka interpoluje krajní body $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_n$. Libovolnou B-spline, resp. NURBS křivku, lze převést opakovaným vkládáním krajních bodů podle věty 4.2 na ukotvenou. Obdobně je tomu i u ploch. \triangleleft

Poznámka: Pro zjemnění uzlových vektorů plochy postupujeme analogicky jako u zjemnění uzlového vektoru křivky. Vložení uzlu $\hat{\xi}_1$ do uzlového vektoru $\Xi_1 = (\xi_{1,1}, \dots, \xi_{n_1+p_1+1,1})$ a $\hat{\xi}_2$ do uzlového vektoru $\Xi_2 = (\xi_{1,2}, \dots, \xi_{n_1+p_1+1,2})$ znamená dopočtení jednoho řádku a jednoho sloupce v řídicí síti $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{i_1, i_2}\}_{i_1=1, i_2=2}^{n_1, n_2}$. Postup je naznačen v následujícím příkladu. \triangleleft

Příklad 5: Pro uzlové vektory $\Xi_1 = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$, $\Xi_2 = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$ a body $\mathbf{P}_{11} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{P}_{12} = (0, \frac{1}{2}, 0)$, $\mathbf{P}_{13} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{P}_{21} = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $\mathbf{P}_{22} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, $\mathbf{P}_{23} = (\frac{1}{2}, 1, 0)$, $\mathbf{P}_{31} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{P}_{32} = (1, \frac{1}{2}, 0)$, $\mathbf{P}_{33} = (1, 1, 0)$ řídicí síť získáme B-spline plochu stupně 2 znázorněnou na Obr. 4.9 s rovnicí

$$\mathbf{X}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2, 4\theta_1\theta_2(\theta_1-1)(\theta_2-1)). \quad (4.10)$$



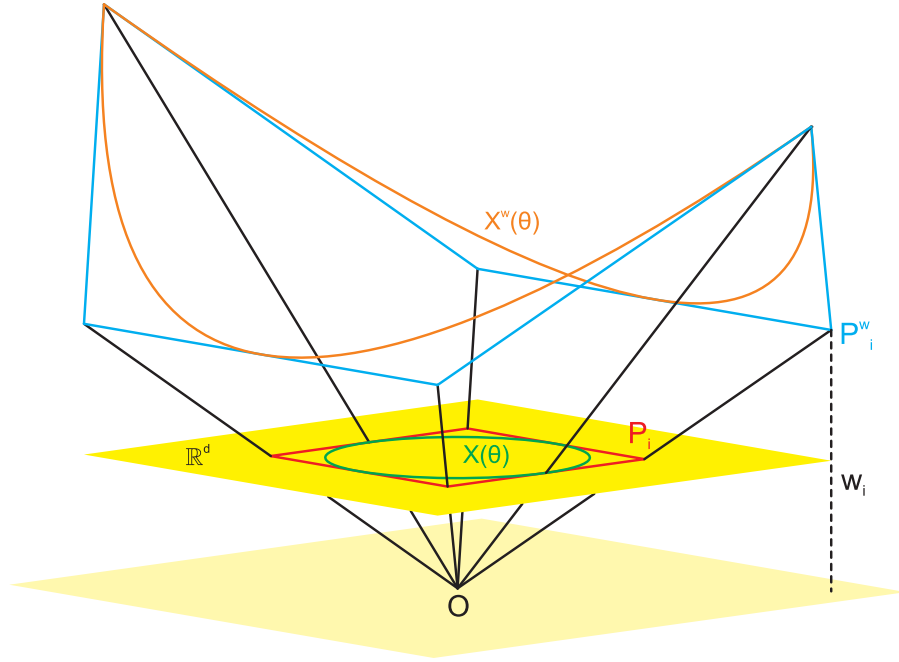
Obrázek 4.6: Zjemnění uzlového vektoru NURBS reprezentace kružnice

Vložení uzlu $\hat{\xi} = \frac{1}{2}$ do uzlového vektoru Ξ_1 získáme zjemněný uzlový vektor $\hat{\Xi}_1 = (0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1)$ a pro každé $i_2 = 1, \dots, 3$ spočteme nové řídicí body podle věty 4.2:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{P}}_{11} &= \mathbf{P}_{11} = (0, 0, 0), \\
\hat{\mathbf{P}}_{21} &= (1 - \alpha_{21})\mathbf{P}_{11} + \alpha_{21}\mathbf{P}_{21} = \left(\frac{1}{4}, 0, 0\right), \\
\hat{\mathbf{P}}_{31} &= (1 - \alpha_{31})\mathbf{P}_{21} + \alpha_{31}\mathbf{P}_{31} = \left(\frac{3}{4}, 0, 0\right), \\
\hat{\mathbf{P}}_{41} &= \mathbf{P}_{31} = (1, 0, 0), \\
\hat{\mathbf{P}}_{12} &= \mathbf{P}_{12} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \\
\hat{\mathbf{P}}_{22} &= (1 - \alpha_{21})\mathbf{P}_{12} + \alpha_{21}\mathbf{P}_{22} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\
\hat{\mathbf{P}}_{32} &= (1 - \alpha_{31})\mathbf{P}_{22} + \alpha_{31}\mathbf{P}_{32} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\
\hat{\mathbf{P}}_{42} &= \mathbf{P}_{32} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right), \\
\hat{\mathbf{P}}_{13} &= \mathbf{P}_{13} = (0, 1, 0), \\
\hat{\mathbf{P}}_{23} &= (1 - \alpha_{21})\mathbf{P}_{13} + \alpha_{21}\mathbf{P}_{23} = \left(\frac{1}{4}, 1, 0\right), \\
\hat{\mathbf{P}}_{33} &= (1 - \alpha_{31})\mathbf{P}_{23} + \alpha_{31}\mathbf{P}_{33} = \left(\frac{3}{4}, 1, 0\right), \\
\hat{\mathbf{P}}_{43} &= \mathbf{P}_{33} = (1, 1, 0),
\end{aligned}$$

kde $\alpha_{21} = \frac{1}{2} = \alpha_{31}$.

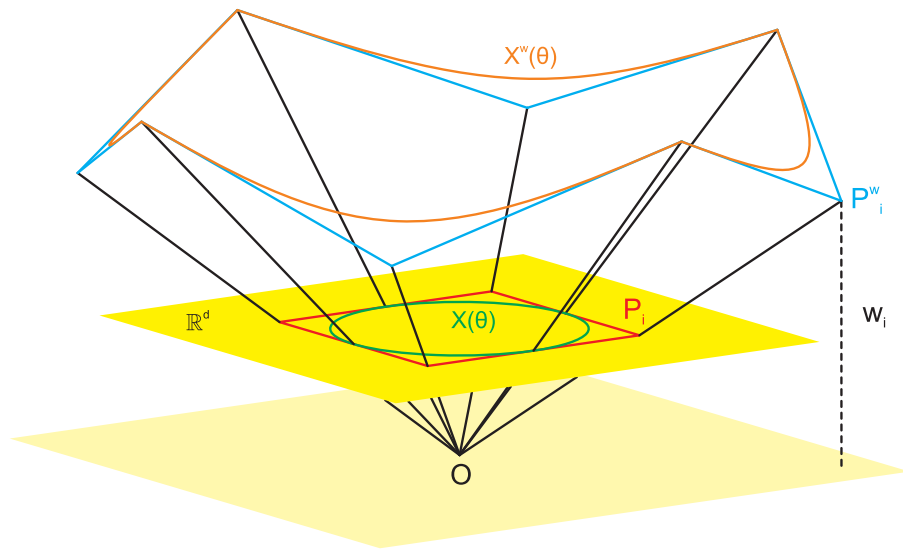
Vložení uzlu $\tilde{\xi} = \frac{1}{2}$ do uzlového vektoru Ξ_2 získáme zjemněný uzlový vektor $\hat{\Xi}_2 = (0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1)$ a pro každé $i_1 = 1, \dots, 4$ spočteme nové řídicí body podle věty 4.2:



Obrázek 4.7: Kružnice $\mathbf{X}(\theta)$ v \mathbb{R}^2 vytvořená projektivním zobrazením po částech kvadratické B-spline křivky $\mathbf{X}^w(\theta)$

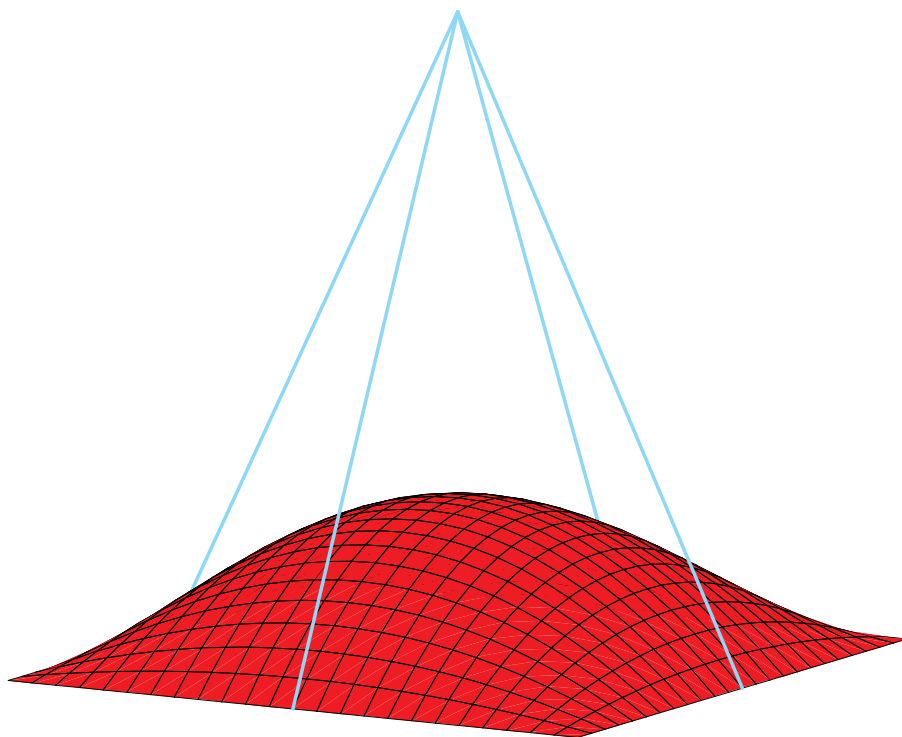
$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{P}}_{11} &= \hat{\mathbf{P}}_{11} = (0, 0, 0), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{12} &= (1 - \alpha_{12})\hat{\mathbf{P}}_{11} + \alpha_{12}\hat{\mathbf{P}}_{12} = (0, \frac{1}{4}, 0), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{13} &= (1 - \alpha_{13})\hat{\mathbf{P}}_{12} + \alpha_{13}\hat{\mathbf{P}}_{13} = (0, \frac{3}{4}, 0), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{14} &= \hat{\mathbf{P}}_{13} = (0, 1, 0), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{21} &= \hat{\mathbf{P}}_{21} = (\frac{1}{4}, 0, 0), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{22} &= (1 - \alpha_{12})\hat{\mathbf{P}}_{21} + \alpha_{12}\hat{\mathbf{P}}_{22} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{23} &= (1 - \alpha_{13})\hat{\mathbf{P}}_{22} + \alpha_{13}\hat{\mathbf{P}}_{23} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{24} &= \hat{\mathbf{P}}_{23} = (\frac{1}{4}, 1, 0), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{31} &= \hat{\mathbf{P}}_{31} = (\frac{3}{4}, 0, 0), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{32} &= (1 - \alpha_{12})\hat{\mathbf{P}}_{31} + \alpha_{12}\hat{\mathbf{P}}_{32} = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{33} &= (1 - \alpha_{13})\hat{\mathbf{P}}_{32} + \alpha_{13}\hat{\mathbf{P}}_{33} = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{34} &= \hat{\mathbf{P}}_{33} = (\frac{3}{4}, 1, 0), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{41} &= \hat{\mathbf{P}}_{41} = (1, 0, 0), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{42} &= (1 - \alpha_{12})\hat{\mathbf{P}}_{41} + \alpha_{12}\hat{\mathbf{P}}_{42} = (1, \frac{1}{4}, 0), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{43} &= (1 - \alpha_{13})\hat{\mathbf{P}}_{42} + \alpha_{13}\hat{\mathbf{P}}_{43} = (1, \frac{3}{4}, 0), \\
\tilde{\mathbf{P}}_{44} &= \hat{\mathbf{P}}_{43} = (1, 1, 0),
\end{aligned}$$

kde $\alpha_{12} = \frac{1}{2} = \alpha_{13}$.

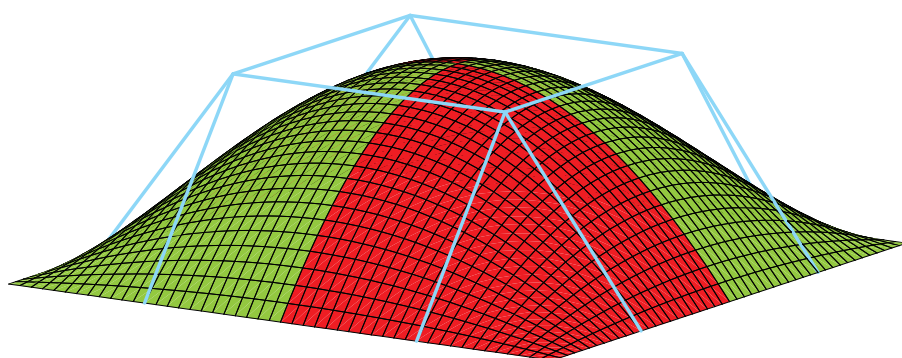


Obrázek 4.8: Kružnice $\mathbf{X}(\theta)$ v \mathbb{R}^2 vytvořená projektivním zobrazením po částech kvadratické B-spline křivky $\mathbf{X}^w(\theta)$

Výsledná plocha je zobrazena na Obr. 4.10. Je složena ze 4 ploch (odlišeno barevně) nad intervaly $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$, $[0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$, $[\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$, které odpovídají původní rovnici (4.10). \triangleleft



Obrázek 4.9: B-spline plocha včetně řídicí sítě před zjemněním



Obrázek 4.10: B-spline plocha včetně řídicí sítě po zjemnění

4.2.2 Zvyšování stupně

Zvyšování stupně B-spline bázevých funkcí odpovídá zvyšování řádu konečných prvků. Zvýšením stupně docílíme vložení potřebného počtu uzlů a tím zvýšení počtu bodů řídicího polygonu. Zvýší se tedy počet veličin, kterými je možno ovlivnit tvar křivky. B-spline křivka je po částech polynomiální a každou polynomiální křivku $\mathbf{X}(\theta) = \sum_{i=0}^p a_i \theta^i$ stupně p můžeme vyjádřit jako polynomiální křivku $\mathbf{X}(\theta) = \sum_{i=0}^{p+1} a_i \theta^i$ stupně $p+1$, položíme-li $a_{p+1} = 0$. V tomto oddílu pracujeme s ukotvenými B-spline křivkami. Mějme tedy uzlový vektor

$$\Xi = \left(\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \underbrace{\gamma_1, \dots, \gamma_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{\gamma_s, \dots, \gamma_s}_{m_s}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right),$$

kde $\{a, \gamma_1, \dots, \gamma_s, b\}$ tvoří rostoucí posloupnost a přirozená čísla $m_i, i = 1, \dots, s$, určují násobnost daného uzlu. Předpokládáme dále spojitě B-spline křivky, tedy násobnost každého uzlu je nejvýše p , jinak bychom každou část řešili samostatně. Dále mějme řídicí polygon $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^n$, kde $n = p+1 + \sum_{i=1}^s m_i$, a B-spline křivku $\mathbf{X}(\theta)$ stupně p podle definice 4.1. Hledáme uzlový vektor Ξ tak, aby byl zachován řád spojitosti mezi jednotlivými uzlovými roztečemi (zvýšíme-li stupeň o 1, každému uzlu zvýšíme násobnost o 1):

$$\hat{\Xi} = \left(\underbrace{a, \dots, a}_{p+2}, \underbrace{\gamma_1, \dots, \gamma_1}_{m_1+1}, \dots, \underbrace{\gamma_s, \dots, \gamma_s}_{m_s+1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+2} \right), \quad (4.11)$$

a nový řídicí polygon $\hat{\mathcal{P}} = \{\hat{\mathbf{P}}_i\}_{i=1}^{\hat{n}}$, kde $\hat{n} = p+s+2 + \sum_{i=1}^s m_i$. Pokud pracujeme s NURBS křivkami, řídíme se řádem spojitosti odpovídající B-spline křivky $\mathbf{X}^w(\theta)$ v homogenních souřadnicích definované jako v (4.4), který může být nižší (srovnejme s příkladem 4 této kapitoly).

Algoritmů pro zvýšení stupně B-spline křivky při zachování její parametrizace i geometrického tvaru je více. Autoři se zaměřují zvláště na rychlost provádění této operace. Zde uvedme precizněji postup, který je rámcově bez důkazů publikovaný v [19]. Tento postup je matematicky poměrně průhledný a rychlost je velmi dobrá. Pro snazší orientaci ho rozdělíme do tří kroků. Nejprve vložíme vnitřní uzly tolikrát, aby jejich výsledná násobnost byla rovna stupni p B-spline bázevých funkcí. To provedeme několikanásobným použitím věty 4.2. Každým vložemím jednoho uzlu se zvýší počet bodů řídicího polygonu o 1 a výslednou B-spline křivku můžeme rozdělit na jednotlivé segmenty Béziových křivek. Ve druhé fázi zvýšíme stupeň jednotlivých segmentů (počet řídicích bodů každého segmentu opět vzroste). V poslední fázi se zbavíme nadbytečných uzlů a tím i bodů řídicího polygonu, abychom dosáhli uzlového vektoru $\hat{\Xi}$.

Protože vkládání uzlů řešil předchozí pododdíl, přistoupíme až ke druhé fázi. Nový uzlový vektor označíme pruhem

$$\bar{\Xi} = \left(\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \underbrace{\gamma_1, \dots, \gamma_1}_p, \dots, \underbrace{\gamma_s, \dots, \gamma_s}_p, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right),$$

a podobně i nové body řídicí polygonu $\bar{\mathcal{P}} = \{\bar{\mathbf{P}}_i\}_{i=1}^{\bar{n}}$ a bázové funkce $\bar{N}_i^p(\theta)$, kde $\bar{n} = (s+1)p + 1$. Nejprve zdefinujeme Bézierovu křivku a uvedeme dvě věty, které nám umožní rozdělit původní B-spline křivku na segmenty - Bézierovy křivky - pro každou nenulovou uzlovou rozteč uzlového vektoru $\bar{\Xi}$. Body $\{\bar{\mathbf{P}}_{1+kp}\}_{k=0}^{s+1}$ jsou krajními body segmentů. Další věta vyřeší zvýšení stupně každé Bézierovy křivky o 1.

Definice 4.5 *Ať je $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^{p+1}$ řídicí polygon. Pak Bézierova křivka je*

$$\mathbf{X}(\theta) = \sum_{i=1}^{p+1} B_{i-1}^p(\theta) \mathbf{P}_i,$$

kde

$$B_i^p(\theta) = \begin{cases} \binom{p}{i} (1-\theta)^{p-i} \theta^i, & i = 0, \dots, p, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

jsou Bernsteinovy polynomy proměnné $\theta \in [0, 1]$ stupně p .

Věta 4.3 *Nechť je dán řídicí polygon $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^{p+1}$ a uzlový vektor*

$$\Xi_p = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right) = (\xi_1, \dots, \xi_{2p+2}).$$

Potom je B-spline křivka $\mathbf{X}(\theta) = \sum_{i=1}^{p+1} \mathbf{P}_i N_i^p(\theta)$ na intervalu $\theta \in [0, 1]$ pro $\theta \in [0, 1]$ Bézierova křivka.

Důkaz: Náznak důkazu je uveden např. v [11], str. 40. Stačí ukázat, že $N_i^p(\theta) = B_{i-1}^p(\theta)$ pro každé $i = 1, \dots, p+1$. Použijeme rekurentní vztah (4.1) pro B-spline bázové funkce a dále indukcí podle stupně p . Pro $p = 0$ je pro uzlový vektor $\Xi_0 = (0, 1)$ jediná nenulová bázová funkce N_1^0 a ta je rovna B_0^0 . Vypočteme bázové funkce stupně p a předpokládáme, že pro $p-1$ věta platí:

$$\begin{aligned} N_i^p &= \frac{\theta - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_i^{p-1} + \frac{\xi_{i+p+1} - \theta}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{p-1} = \\ &= \frac{\theta - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_{i-2}^{p-1} + \frac{\xi_{i+p+1} - \theta}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i-1}^{p-1}. \end{aligned}$$

Posun o dvě místa v dolním indexu je způsoben indukčním předpokladem, který platí pro uzlový vektor

$$\Xi_{p-1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_p, \underbrace{1, \dots, 1}_p)$$

(jeho délka je závislá na p) a B-spline bázové funkce, kterých je v tomto případě o dvě méně (odpadla první a poslední nulová bázová funkce). Dále již pracujeme s Bernsteinovými polynomy. Pro $i = 1$ je podle definice $B_{-1}^{p-1} = 0$ a obdobně pro $i = p + 1$ je $B_p^{p-1} = 0$. Pro $i = 1$ upravíme

$$N_1^p = (1 - \theta)B_0^{p-1} = B_0^p,$$

pro $i = p + 1$

$$N_{p+1}^p = \theta B_{p-1}^{p-1} = B_p^p,$$

a konečně pro $i = 2, \dots, p$

$$\begin{aligned} N_i^p &= \frac{\theta - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_{i-2}^{p-1} + \frac{\xi_{i+p+1} - \theta}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i-1}^{p-1} = \\ &= \theta \binom{p-1}{i-2} (1-\theta)^{p-i+1} \theta^{i-2} + (1-\theta) \binom{p-1}{i-1} (1-\theta)^{p-i} \theta^{i-1} = \\ &= (1-\theta)^{p-i+1} \theta^{i-1} \left[\binom{p-1}{i-2} + \binom{p-1}{i-1} \right] = B_{i-1}^p. \end{aligned}$$

□

Poznámka: Pokud je obecněji $\theta \in [a, b]$, pak mají jednoduchým přepočtem Bernsteinovy polynomy tvar

$$B_i^p(\theta) = \begin{cases} \binom{p}{i} (b - \theta)^{p-i} (\theta - a)^i \frac{1}{(b-a)^p}, & i = 0, \dots, p, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

◁

Věta 4.4 *Nechť je dán stupeň p , uzlový vektor*

$$\begin{aligned} \bar{\Xi} &= (\underbrace{\gamma_0, \dots, \gamma_0}_{p+1}, \underbrace{\gamma_1, \dots, \gamma_1}_p, \dots, \underbrace{\gamma_s, \dots, \gamma_s}_p, \underbrace{\gamma_{s+1}, \dots, \gamma_{s+1}}_{p+1}) = \\ &= (\xi_1, \dots, \xi_{2+(s+2)p}), \end{aligned}$$

kde pro každé $k = 0, \dots, s$ je $\gamma_k < \gamma_{k+1}$, B-spline bázové funkce $\bar{N}_i^p(\theta)$, které odpovídají uzlovému vektoru $\bar{\Xi}$, a řídicí polygon $\bar{P} = \{\bar{P}_i\}_{i=1}^{\bar{n}}$, kde $\bar{n} = (s+1)p + 1$.

Potom je B-spline křivka na intervalu $\theta \in [\gamma_k, \gamma_{k+1}]$, kde $k = 0, \dots, s$, identická s Bézierovou křivkou:

$$\sum_{i=1+kp}^{1+(k+1)p} \bar{\mathbf{P}}_i \bar{N}_i^p(\theta) = \sum_{i=1+kp}^{1+(k+1)p} \bar{\mathbf{P}}_i \bar{B}_{k,i-1-kp}^p(\theta),$$

kde

$$\bar{B}_{k,i}^p(\theta) = \begin{cases} \binom{p}{i} (\gamma_{k+1} - \theta)^{p-i} (\theta - \gamma_k)^i \frac{1}{(\gamma_{k+1} - \gamma_k)^p}, & i = 0, \dots, p, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Důkaz: Důkaz probíhá ve stejném duchu jako důkaz věty 4.3. Dořešíme pouze bázové funkce $\bar{N}_{1+kp}^p(\theta)$, kde $k = 1, \dots, s$, které jsou nenulové pro $\theta \in [\gamma_{k-1}, \gamma_{k+1}]$ a přispívají svými hodnotami k $\bar{B}_{k-1,p}^p(\theta)$ i $\bar{B}_{k,0}^p(\theta)$. Podle rekurentního vztahu (4.1) je

$$\bar{N}_{1+kp}^p(\theta) = \frac{\theta - \xi_{1+kp}}{\xi_{1+(k+1)p} - \xi_{1+kp}} \bar{N}_{1+kp}^{p-1}(\theta) + \frac{\xi_{2+(k+1)p} - \theta}{\xi_{2+(k+1)p} - \xi_{2+kp}} \bar{N}_{2+kp}^{p-1}(\theta).$$

Protože

$$\begin{aligned} \bar{N}_{1+kp}^{p-1}(\theta) &= 0 & \text{pro } \theta \notin (\xi_{1+kp}, \xi_{1+(k+1)p}) &= (\gamma_{k-1}, \gamma_k), \\ \bar{N}_{2+kp}^{p-1}(\theta) &= 0 & \text{pro } \theta \notin (\xi_{2+kp}, \xi_{2+(k+1)p}) &= (\gamma_k, \gamma_{k+1}), \end{aligned}$$

je pro $\theta \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k]$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{1+kp}^{p-1}(\theta) &= \frac{\theta - \gamma_{k-1}}{\gamma_k - \gamma_{k-1}} \bar{N}_{1+kp}^{p-1}(\theta) \stackrel{(\clubsuit)}{=} \frac{\theta - \gamma_{k-1}}{\gamma_k - \gamma_{k-1}} \bar{B}_{k-1,p-1}^{p-1}(\theta) = \\ &= \frac{\theta - \gamma_{k-1}}{\gamma_k - \gamma_{k-1}} \binom{p-1}{p-1} \frac{(\theta - \gamma_{k-1})^{p-1}}{(\gamma_k - \gamma_{k-1})^{p-1}} = \bar{B}_{k-1,p}^p, \end{aligned}$$

a pro $\theta \in [\gamma_k, \gamma_{k+1}]$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{1+kp}^{p-1}(\theta) &= \frac{\gamma_{k+1} - \theta}{\gamma_{k+1} - \gamma_k} \bar{N}_{2+kp}^{p-1}(\theta) \stackrel{(\clubsuit)}{=} \frac{\gamma_{k+1} - \theta}{\gamma_{k+1} - \gamma_k} \bar{B}_{k,0}^{p-1}(\theta) = \\ &= \frac{\gamma_{k+1} - \theta}{\gamma_{k+1} - \gamma_k} \binom{p-1}{0} \frac{(\gamma_{k+1} - \theta)^{p-1}}{(\gamma_{k+1} - \gamma_k)^{p-1}} = \bar{B}_{k,0}^p. \end{aligned}$$

V rovnostech (\clubsuit) nedochází k posunu o 2 místa v dolním indexu Bernsteinova polynomu, protože B-spline bázové funkce jsou definované na uzlovém vektoru o 2 uzly kratším, než je tomu ve větě 4.3:

$$\bar{\Xi} = (\dots, \underbrace{\gamma_{k-1}, \dots, \gamma_{k-1}}_p, \underbrace{\gamma_k, \dots, \gamma_k}_p, \underbrace{\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_{k+1}}_p, \dots).$$

□

Věta 4.5 (Zvyšování stupně Bézierovy křivky)

Mějme řídicí polygony $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^{p+1}$ a $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{\mathbf{P}}_i\}_{i=1}^{p+2}$, pro které platí

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_1 &= \mathbf{P}_1, \\ \tilde{\mathbf{P}}_i &= (1 - \alpha_i)\mathbf{P}_i + \alpha_i\mathbf{P}_{i-1}, \text{ kde } \alpha_i = \frac{i-1}{p+1}, \quad i = 2, \dots, p+1, \\ \tilde{\mathbf{P}}_{p+2} &= \mathbf{P}_{p+1}.\end{aligned}$$

a Bézierovy křivky $\mathbf{X}(\theta)$, stupně p proměnné θ , a $\tilde{\mathbf{X}}(\theta)$, stupně $p+1$ proměnné θ , definované podle definice 4.5:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\theta) &= \sum_{i=1}^{p+1} B_{i-1}^p(\theta)\mathbf{P}_i, \\ \tilde{\mathbf{X}}(\theta) &= \sum_{i=1}^{p+2} B_{i-1}^{p+1}(\theta)\tilde{\mathbf{P}}_i.\end{aligned}$$

Pak

$$\mathbf{X}(\theta) = \tilde{\mathbf{X}}(\theta) \quad \text{pro } \theta \in [0, 1].$$

Důkaz: Provedeme přímým výpočtem.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}}(\theta) &= \sum_{i=1}^{p+2} B_{i-1}^{p+1}(\theta)\tilde{\mathbf{P}}_i = B_0^{p+1}(\theta)\tilde{\mathbf{P}}_1 + \sum_{i=2}^{p+1} B_{i-1}^{p+1}(\theta)\tilde{\mathbf{P}}_i + B_{p+1}^{p+1}(\theta)\tilde{\mathbf{P}}_{p+2} = \\ &= \binom{p+1}{0}(1-\theta)^{p+1}\mathbf{P}_1 + \binom{p+1}{p+1}\theta^{p+1}\mathbf{P}_{p+1} + \\ &\quad + \sum_{i=2}^{p+1} [(1-\alpha_i)\mathbf{P}_i + \alpha_i\mathbf{P}_{i-1}] B_{i-1}^{p+1}(\theta) = \\ &= (1-\theta)B_0^p(\theta)\mathbf{P}_1 + \theta B_p^p(\theta)\mathbf{P}_{p+1} + \\ &\quad + \sum_{i=2}^{p+1} \left[\frac{p+2-i}{p+1}\mathbf{P}_i + \frac{i-1}{p+1}\mathbf{P}_{i-1} \right] \frac{(p+1)!}{(p+2-i)!(i-1)!} (1-\theta)^{p+2-i} \theta^{i-1} = \\ &= (1-\theta) \sum_{i=1}^{p+1} B_{i-1}^p(\theta)\mathbf{P}_i + \theta \sum_{i=2}^{p+1} B_{i-2}^p(\theta)\mathbf{P}_{i-1} + \theta B_p^p(\theta)\mathbf{P}_{p+1} = \\ &= (1-\theta) \sum_{i=1}^{p+1} B_{i-1}^p(\theta)\mathbf{P}_i + \theta \sum_{i=1}^{p+1} B_{i-1}^p(\theta)\mathbf{P}_i = \mathbf{X}(\theta).\end{aligned}$$

□

Pro každou nenulovou uzlovou rozteč máme Bézierovu křivku stupně $p+1$. Body $\left\{ \tilde{\mathbf{P}}_{1+k(p+1)} \right\}_{k=0}^{s+1}$ jsou krajními body segmentů. Protože koncové body každého segmentu se nezměnily, $\tilde{\mathbf{P}}_{1+kp} = \tilde{\mathbf{P}}_{1+k(p+1)}$, a nezměnil se ani tvar křivek, můžeme spojit tyto Bézierovy křivky v jedinou B-spline křivku s řídicím polygonem $\tilde{\mathcal{P}} = \left\{ \tilde{\mathbf{P}}_i \right\}_{i=1}^{\tilde{n}}$, kde $\tilde{n} = (s+1)(p+1) + 1$, uzlovým vektorem

$$\tilde{\Xi} = \left(\underbrace{a, \dots, a}_{p+2}, \underbrace{\gamma_1, \dots, \gamma_1}_{p+1}, \dots, \underbrace{\gamma_s, \dots, \gamma_s}_{p+1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+2} \right),$$

a s odpovídajícími B-spline bázovými funkcemi $\tilde{N}_i^{p+1}(\theta)$ podle věty 4.4.

Srovnáme-li tento uzlový vektor s uzlovým vektorem (4.11), vidíme, že některé uzly jsou přidány zbytečně. Odebrání uzlu je při zvyšování stupně méně náročný proces než obecně odebrání uzlu pro NURBS křivku, resp. NURBS plochu, kdy po prověření spojitosti jednostranných derivací následuje užití níže uvedeného algoritmu, srovnajme s [23]. Při zvyšování stupně víme dopředu kolikrát lze který uzel odebrat. Každý uzel γ_r odebereme $(p - m_r)$ -krát, kde $r = 1, \dots, s$. Počet bodů řídicího polygonu na nezbytně nutný ke zvýšení stupně B-spline bázových funkcí snížíme o $sp - \sum_{r=1}^s m_r$. I když z násobnosti vnitřních uzlů plyne, že B-spline bázové funkce jsou pouze spojitě, samotná B-spline křivka může mít řád spojitosti lepší. Odebrání uzlu při zvyšování stupně je inverzním krokem k vložení uzlu (odebráním uzlu nezměníme parametrizaci ani geometrický tvar křivky). Bázové funkce sestavíme pro uzlový vektor $\tilde{\Xi}$ a použijeme obráceně větu 4.2 pro nalezení nového řídicího polygonu.

Pro jednonásobné odebrání uzlu γ_r ve větě 4.2 položme $k = (r+1)(p+1)$. Prvních $r(p+1)$ a posledních $(s-r)(p+1) + 1$ bodů se tedy shoduje:

$$\tilde{\mathbf{P}}_i = \begin{cases} \mathbf{Q}_i & 1 \leq i \leq r(p+1) \\ \mathbf{Q}_{i-1} & (r+1)(p+1) + 1 \leq i \leq \tilde{n} \end{cases}.$$

Rekurentně tedy můžeme spočítat \mathbf{Q}_i (záměrně značíme \mathbf{Q} , protože teprve po odebrání posledního nadbytečného uzlu, dostáváme body $\hat{\mathbf{P}}$) pomocí \mathbf{Q}_{i-1} a $\tilde{\mathbf{P}}_i$:

$$\tilde{\mathbf{P}}_i = (1 - \alpha_i)\mathbf{Q}_{i-1} + \alpha_i\mathbf{Q}_i \quad r(p+1) + 1 \leq i \leq (r+1)(p+1).$$

Označíme-li uzly podobně jako ve větě 4.2:

$$\tilde{\Xi} = \left(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{(s+2)(p+1)+2} \right),$$

je $\tilde{\xi}_{k+1} = \gamma_r$ a výrazy

$$\alpha_{r(p+1)+1} = \frac{\gamma_r - \tilde{\xi}_{r(p+1)+1}}{\tilde{\xi}_{(r+1)(p+1)+2} - \tilde{\xi}_{r(p+1)+1}} = \frac{\gamma_r - \gamma_{r-1}}{\gamma_{r+1} - \gamma_{r-1}},$$

$$\alpha_i = 0, \quad r(p+1) + 2 \leq i \leq (r+1)(p+1).$$

Pokud je třeba odebrat uzel γ_r vícekrát, celý postup opakujeme: pro uzlový vektor bez jednoho γ_r upravíme k pro větu 4.2. Ve druhém kroku budou dvě nenulová α_i atd.

Příklad 6: Ukotvená kubická B-spline křivka je určena uzlovým vektorem $\Xi = (0, 0, 0, 0, \gamma_1, \gamma_2, 1, 1, 1, 1)$ a řídicím polygonem $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_i^0\}_{i=1}^6$. Protože při výpočtu vystupuje několik řídicích polygonů je značení horním indexem u bodu praktičtější než používání různých akcentů. Počáteční stav je označen indexem 0. Nejprve vložíme dvakrát uzel γ_1 , poté dvakrát uzel γ_2 a rozdělíme křivku na jednotlivé segmenty, které jsou Bézierovými křivkami. Postupný výpočet bodů řídicích polygonů je patrný z Tab. 4.3 a graficky je situace znázorněna pro konkrétní γ_1, γ_2 na Obr. 4.11b.

Křivka je nyní rozdělena na 3 segmenty - Bézierovy křivky. U každého segmentu zvýšíme stupeň (zvyšujeme stupeň o 1 a počet řídicích bodů každého segmentu se zvýší o 1, tedy dohromady o 3). Protože počáteční a koncový řídicí bod každého segmentu zůstává nezměněn, provedeme zvýšení stupně všech tří segmentů v jednom kroku, Tab. 4.4 horní index 5, Obr. 4.11c. B-spline křivka stupně 4 s řídicími body $\{\mathbf{P}_i^5\}_{i=1}^{13}$ má uzlový vektor

$$\tilde{\Xi} = (0, 0, 0, 0, 0, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_2, \gamma_2, \gamma_2, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Abychom dosáhli zachování řádu spojitosti mezi uzlovými roztečemi i po zvýšení stupně, řídicí vektor by měl mít tvar

$$\hat{\Xi} = (0, 0, 0, 0, 0, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_2, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Toho docílíme vynecháním dvakrát uzlu γ_1 a dvakrát uzlu γ_2 . V důsledku toho se sníží počet bodů řídicího polygonu na 9, Tab. 4.4 horní index 6, Obr. 4.11d. Pro původní i novou křivku platí stejná parametrizace. Uveďme zde alespoň parametrizaci odpovídající Obr. 4.11, pro kterou $\gamma_1 = \frac{1}{3}$, $\gamma_2 = \frac{2}{3}$ a $\mathbf{P}_1^0 = (-1, -1)$, $\mathbf{P}_2^0 = (-\frac{3}{2}, 0)$, $\mathbf{P}_3^0 = (-1, 1)$, $\mathbf{P}_4^0 = (1, 1)$, $\mathbf{P}_5^0 = (\frac{3}{2}, 0)$, $\mathbf{P}_6^0 = (1, -1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\theta) &= \left(-\frac{117}{8}\theta^3 + \frac{81}{4}\theta^2 - \frac{9}{2}\theta - 1, \frac{27}{4}\theta^3 - \frac{27}{2}\theta^2 + 9\theta - 1 \right), & \theta \in \left[0, \frac{1}{3} \right), \\ \mathbf{X}(\theta) &= \left(-\frac{9}{8}(2\theta - 1)(5\theta^2 - 5\theta - 1), -\frac{27}{4}\theta^2 + \frac{27}{4}\theta - \frac{3}{4} \right), & \theta \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \\ \mathbf{X}(\theta) &= \left(-\frac{117}{8}\theta^3 + \frac{189}{8}\theta^2 - \frac{63}{8}\theta - \frac{1}{8}, -\frac{27}{4}\theta^3 + \frac{27}{4}\theta^2 - \frac{9}{4}\theta + \frac{5}{4} \right), & \theta \in \left[\frac{2}{3}, 1 \right). \end{aligned}$$

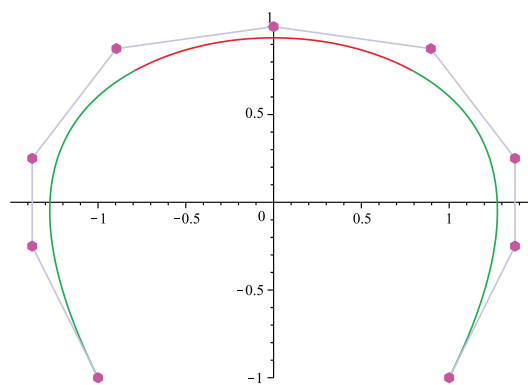
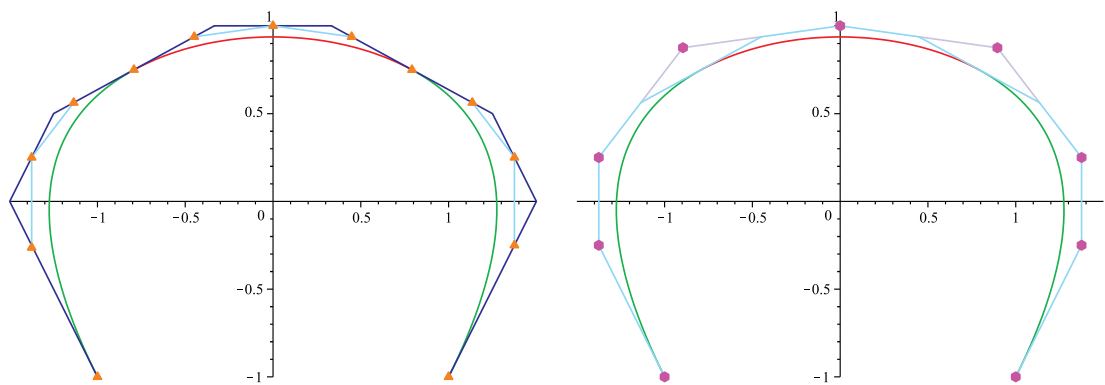
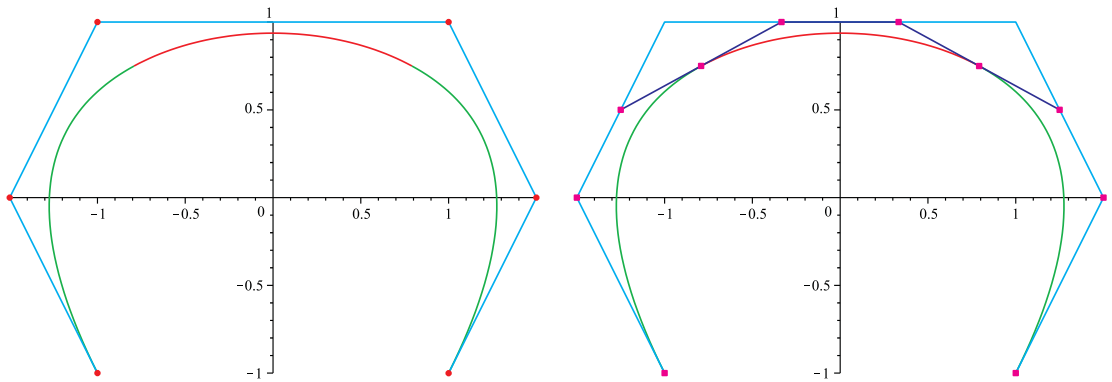
◁

\mathbf{P}_1^0	$\mathbf{P}_1^1 = \mathbf{P}_1^0$	$\mathbf{P}_1^2 = \mathbf{P}_1^1$	$\mathbf{P}_1^3 = \mathbf{P}_1^2$	$\mathbf{P}_1^4 = \mathbf{P}_1^3$
\mathbf{P}_2^0	$\mathbf{P}_2^1 = \mathbf{P}_2^0$	$\mathbf{P}_2^2 = \mathbf{P}_2^1$	$\mathbf{P}_2^3 = \mathbf{P}_2^2$	$\mathbf{P}_2^4 = \mathbf{P}_2^3$
\mathbf{P}_3^0	$\mathbf{P}_3^1 = \mathbf{P}_2^0 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (\mathbf{P}_3^0 - \mathbf{P}_2^0)$	$\mathbf{P}_3^2 = \mathbf{P}_3^1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (\mathbf{P}_4^1 - \mathbf{P}_3^1)$	$\mathbf{P}_3^3 = \mathbf{P}_3^2$	$\mathbf{P}_3^4 = \mathbf{P}_3^3$
\mathbf{P}_4^0	$\mathbf{P}_4^1 = \mathbf{P}_3^0 + \gamma_1 (\mathbf{P}_4^0 - \mathbf{P}_3^0)$	$\mathbf{P}_4^2 = \mathbf{P}_3^1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (\mathbf{P}_4^1 - \mathbf{P}_3^1)$	$\mathbf{P}_4^3 = \mathbf{P}_4^2$	$\mathbf{P}_4^4 = \mathbf{P}_4^3$
\mathbf{P}_5^0	$\mathbf{P}_5^1 = \mathbf{P}_4^0$	$\mathbf{P}_5^2 = \mathbf{P}_4^1$	$\mathbf{P}_5^3 = \mathbf{P}_5^2 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{1 - \gamma_1} (\mathbf{P}_6^2 - \mathbf{P}_5^2)$	$\mathbf{P}_5^4 = \mathbf{P}_5^3$
\mathbf{P}_6^0	$\mathbf{P}_6^1 = \mathbf{P}_5^0$	$\mathbf{P}_6^2 = \mathbf{P}_5^1$	$\mathbf{P}_6^3 = \mathbf{P}_6^2 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{1 - \gamma_1} (\mathbf{P}_7^2 - \mathbf{P}_6^2)$	$\mathbf{P}_6^4 = \mathbf{P}_6^3 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{1 - \gamma_1} (\mathbf{P}_7^3 - \mathbf{P}_6^3)$
	$\mathbf{P}_7^1 = \mathbf{P}_6^0$	$\mathbf{P}_7^2 = \mathbf{P}_6^1$	$\mathbf{P}_7^3 = \mathbf{P}_7^2$	$\mathbf{P}_7^4 = \mathbf{P}_7^3$
		$\mathbf{P}_8^2 = \mathbf{P}_7^1$	$\mathbf{P}_8^3 = \mathbf{P}_8^2$	$\mathbf{P}_8^4 = \mathbf{P}_8^3$
			$\mathbf{P}_9^3 = \mathbf{P}_8^2$	$\mathbf{P}_{10}^4 = \mathbf{P}_9^3$

Tabulka 4.3: Postupný výpočet bodů řídicího polygonu v důsledku vkládání uzlů

$$\begin{array}{l}
\mathbf{P}_1^4 \\
\mathbf{P}_2^4 \\
\mathbf{P}_3^4 \\
\mathbf{P}_4^4 \\
\mathbf{P}_5^4 \\
\mathbf{P}_6^4 \\
\mathbf{P}_7^4 \\
\mathbf{P}_8^4 \\
\mathbf{P}_9^4 \\
\mathbf{P}_{10}^4
\end{array}
\begin{array}{l}
\mathbf{P}_1^5 = \mathbf{P}_1^4 \\
\mathbf{P}_2^5 = \mathbf{P}_2^4 - \frac{1}{4} (\mathbf{P}_2^4 - \mathbf{P}_1^4) \\
\mathbf{P}_3^5 = \mathbf{P}_3^4 - \frac{1}{2} (\mathbf{P}_3^4 - \mathbf{P}_2^4) \\
\mathbf{P}_4^5 = \mathbf{P}_4^4 - \frac{3}{4} (\mathbf{P}_4^4 - \mathbf{P}_3^4) \\
\mathbf{P}_5^5 = \mathbf{P}_4^4 \\
\mathbf{P}_6^5 = \mathbf{P}_5^4 - \frac{1}{4} (\mathbf{P}_5^4 - \mathbf{P}_4^4) \\
\mathbf{P}_7^5 = \mathbf{P}_6^4 - \frac{1}{2} (\mathbf{P}_6^4 - \mathbf{P}_5^4) \\
\mathbf{P}_8^5 = \mathbf{P}_7^4 - \frac{3}{4} (\mathbf{P}_7^4 - \mathbf{P}_6^4) \\
\mathbf{P}_9^5 = \mathbf{P}_7^4 \\
\mathbf{P}_{10}^5 = \mathbf{P}_8^4 - \frac{1}{4} (\mathbf{P}_8^4 - \mathbf{P}_7^4) \\
\mathbf{P}_{11}^5 = \mathbf{P}_9^4 - \frac{1}{2} (\mathbf{P}_9^4 - \mathbf{P}_8^4) \\
\mathbf{P}_{12}^5 = \mathbf{P}_{10}^4 - \frac{3}{4} (\mathbf{P}_{10}^4 - \mathbf{P}_9^4) \\
\mathbf{P}_{13}^5 = \mathbf{P}_{10}^4
\end{array}
\begin{array}{l}
\mathbf{P}_1^6 = \mathbf{P}_1^5 \\
\mathbf{P}_2^6 = \mathbf{P}_2^5 \\
\mathbf{P}_3^6 = \mathbf{P}_3^5 \\
\mathbf{P}_4^6 = \mathbf{P}_3^5 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (\mathbf{P}_4^5 - \mathbf{P}_3^5) \\
\mathbf{P}_5^6 = \mathbf{P}_7^5 \\
\mathbf{P}_6^6 = \mathbf{P}_{11}^5 + \frac{1-\gamma_1}{1-\gamma_2} (\mathbf{P}_{10}^5 - \mathbf{P}_{11}^5) \\
\mathbf{P}_7^6 = \mathbf{P}_{11}^5 \\
\mathbf{P}_8^6 = \mathbf{P}_{12}^5 \\
\mathbf{P}_9^6 = \mathbf{P}_{13}^5
\end{array}$$

Tabulka 4.4: Postupný výpočet bodů řídicího polygonu v důsledku zvyšování stupně



Obrázek 4.11: Zvyšování stupně

4.3 Isogeometrická metoda

Pro přehlednost nejprve shrňme algoritmus isogeometrické metody pro slabou formulaci problému na konečně dimenzionálním podprostoru prostoru řešení:

- volbou uzlového vektoru, resp. uzlových vektorů, určíme síť na oblasti ω parametrického prostoru, Obr. 4.1,
- *isogeometrické prvky* představují nenulové uzlové rozteče oblasti ω ,
- zvolíme stupeň B-spline bázových funkcí, váhy řídicích bodů a sestrojíme NURBS bázové funkce podle (4.3),
- reprezentujeme geometrii objektu i hledané veličiny stejnými bázovými funkcemi,
- Dirichletovy okrajové podmínky ovlivňují řídicí body:
 - homogenní podmínky jsou splněny automaticky a přesně,
 - nehomogenní podmínky jsou aproximovány v prostoru generovaném bázovými funkcemi,
- řešení soustavy rovnic.

Isogeometrické prvky zavedeme na dvourozměrné oblasti ω , která standardně představuje interval $(0, 1) \times (0, 1)$. Pro stupně p_α , $\alpha \in \{1, 2\}$, a otevřené³ uzlové vektory Ξ_α definované obdobně jako v definici 4.2:

$$\Xi_\alpha = (0 = \xi_{1,\alpha}, \xi_{2,\alpha}, \dots, \xi_{n_\alpha+p_\alpha+1} = 1)$$

zavedeme množinu

$$\mathcal{Q}(\Xi_1, \Xi_2) = \{Q = (\xi_{i_1,1}, \xi_{i_1+1,1}) \times (\xi_{i_2,2}, \xi_{i_2+1,2}); Q \neq \emptyset, p_\alpha + 1 \leq i_\alpha \leq n_\alpha - 1\}$$

neprázdných dvoudimenzionálních otevřených uzlových roztečí, která je dělením $(0, 1) \times (0, 1)$ na 2-dimenzionální prvky Q . Každé uzlové rozteči

$$Q = (\xi_{i_1,1}, \xi_{i_1+1,1}) \times (\xi_{i_2,2}, \xi_{i_2+1,2})$$

přiřadíme její rozšíření

$$\tilde{Q} = (\xi_{i_1-p_1,1}, \xi_{i_1+p_1+1,1}) \times (\xi_{i_2-p_2,2}, \xi_{i_2+p_2+1,2}).$$

Pro zvolené stupně a váhy platí některé důležité vlastnosti NURBS bázových funkcí sestrojených podle (4.3), které vyplývají z vlastností B-spline bázových funkcí sestrojených jako v definici 4.1 :

³Krajní uzly jsou $(p_\alpha + 1)$ násobné.

1. Pro každé $i_1, i_2, \theta_1, \theta_2, p_1, p_2$ je $R_{i_1, i_2}^{p_1, p_2}(\theta_1, \theta_2) \geq 0$. Naproti tomu v MKP nabývají běžně bázové funkce vyšších stupňů i záporných hodnot.
2. Pro každé $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$ platí rozdělení jedničky:

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} R_{i_1, i_2}^{p_1, p_2}(\theta_1, \theta_2) = 1.$$

3. Na každé nenulové uzlové rozteči je nejvýše $(p_1 + 1)(p_2 + 1)$ nenulových NURBS bázových funkcí.
4. Každá NURBS bázová funkce je $(p_i - k_i)$ krát diferencovatelná vzhledem θ_i v uzlu násobnosti k_i .

Na některé body algoritmu se nyní zaměříme více. Definujeme *prostor splinů*, obdobně jako v [1],

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\Xi_\alpha; p_\alpha) = \text{span} \{N_{i_1, 1}^{p_1} N_{i_2, 2}^{p_2}\}_{i_1=1, i_2=1}^{n_1, n_2}$$

jako lineární obal B-spline bázových funkcí odpovídajících uzlovým vektorům Ξ_α , $\alpha = 1, 2$, a stupňům p_α , a *NURBS prostor*

$$\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(\Xi_\alpha; p_\alpha) = \text{span} \{R_{i_1, i_2}^{p_1, p_2}\}_{i_1=1, i_2=1}^{n_1, n_2}$$

jako lineární obal NURBS bázových funkcí odpovídajících uzlovým vektorům Ξ_α , $\alpha = 1, 2$, stupňům p_α a váhám w_{i_1, i_2} . Dále považujeme stupně B-spline bázových funkcí a váhy za pevně zvolené. Pro množinu uzlových roztečí \mathcal{Q} označíme maximální průměr

$$h = \max \{h_Q; Q \in \mathcal{Q}\}.$$

uzlové rozteče. Dále předpokládáme, že $\{\mathcal{Q}_h\}_h$ je *tvarově regulární* (podíl nejmenší strany každé uzlové rozteče Q a jejího průměru h_Q je omezen). Geometrie objektu je zadaná v nejhrubší síti a jak je zřejmé z mechanismů odvozených v oddílu 4.2.1 pro zjemňování uzlových vektorů se geometrie v důsledku zjemňování nemění. Pro dvojici Q_1, Q_2 sousedních (společná strana) prvků definujeme k_{Q_1, Q_2} jako počet (závisí na násobnosti vnitřních uzlů) spojitých derivací přes jejich společnou hranici $\partial Q_1 \cap \partial Q_2$. Dále zavedeme prostor

$$\mathcal{H}^k = \left\{ \begin{array}{l} v \in L_2((0, 1)^2); \\ \forall Q \in \mathcal{Q}, v|_Q \in W_2^k(Q), \\ \forall Q_1, Q_2 : (\partial Q_1 \cap \partial Q_2 \neq \emptyset), \forall l \in \mathbb{N}, 0 \leq l \leq \min \{k_{Q_1, Q_2}, k - 1\} \\ \nabla^l(v|_{Q_1}) = \nabla^l(v|_{Q_2}) \text{ na } \partial Q_1 \cap \partial Q_2 \end{array} \right\},$$

kde L_2 je standardní Lebesgueův prostor, W_2^k Sobolevův prostor a ∇^l značí operátor parciálních diferencí l tého řádu, speciálně $\nabla^0 v = v$. Prostor \mathcal{H}^k je dobře definovaný Hilbertův prostor se seminormou

$$|v|_{\mathcal{H}^i}^2 = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} |v|_{W_2^i(Q)}^2, \quad 0 \leq i \leq k,$$

a normu

$$\|v\|_{\mathcal{H}^k}^2 = \sum_{i=0}^k |v|_{\mathcal{H}^i}^2.$$

Každou množinu i prostor označíme odpovídajícím indexem h . Získáme tedy množiny $\{\mathcal{Q}_h\}_h$, $\{\mathcal{S}_h\}_h$, $\{\mathcal{N}_h\}_h$, $\{\mathcal{H}_h^k\}_h$. Pro řešení hledaná v prostoru $\{\mathcal{H}_h^k\}_h$ jsou v [1] odvozeny aproximační vlastnosti v závislosti na zjemňování uzlových vektorů.

Isogeometrická metoda zaznamenává v poslední době velký rozvoj. Přibývají odhady chyb aproximace a rozvíjejí se další možnosti zjemňování, jako je například k -zjemnění, které navíc zlepšuje spojitosti bázových funkcí, [8].

Kapitola 5

Modelování minimálních ploch

5.1 Minimální Bézierova plocha

5.1.1 Formulace Plateauova-Bézierova problému

Tento oddíl vychází z článků [15] a [14]. Výsledky lemmatu 5.1, uvedené v této práci, doznaly jemných změn, jejichž původ je patrný z provedeného důkazu za tímto lemmatem.

Poznámka: Pro jednoduchost přejdeme v tomto oddíle od značení proměnných θ_1, θ_2 ke značení u, v . ◁

Definice 5.1 *Ať je $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{ij}\}_{i,j=0}^{m,n}$ řídicí síť bodů a Bézierova plocha je vyjádřena*

$$\mathbf{X}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{P}_{ij},$$

kde

$$B_i^m(u) = \begin{cases} \binom{m}{i} (1-u)^{m-i} u^i, & 0 \leq i \leq m, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

jsou Bernsteinovy polynomy proměnné u stupně m .

Povrch Bézierovy plochy ať je definovaný funkcionalém (3.1), kde $\omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Úpravou velikosti vektorového součinu a pomocí koeficientů $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ první základní formy plochy můžeme (3.1) vyjádřit jako

$$A_\omega(\mathbf{X}) = \int_\omega \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \, du \, dv. \quad (5.1)$$

Hranice Bézierovy plochy je určena řídicími body $\{\mathbf{P}_{ij}\}$, kde $i = 0, m$ a $j = 0, n$. Cílem je tedy sestavit $3(m-1)(n-1)$ podmínek pro výpočet souřadnic vnitřních bodů.

Problém 5 (*Plateauův-Bézierův*) Pro pevně dané okrajové řídicí body $\{\mathbf{P}_{ij}\}_{i=0,m, j=0,n}$ hledejme vnitřní body tak, aby výsledná Bézierova plocha měla nejmenší povrch mezi všemi Bézierovými plochami se stejnými okrajovými řídicími body.

Protože obecně platí

$$\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \leq \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}} \leq \frac{\mathcal{E} + \mathcal{G}}{2},$$

můžeme shora omezit plošný integrál (5.1) Dirichletovým integrálem:

$$A_\omega(\mathbf{X}) \leq D_\omega(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \int_\omega (\mathcal{E} + \mathcal{G}) \, du \, dv = \frac{1}{2} \int (\|\mathbf{X}_u\|^2 + \|\mathbf{X}_v\|^2) \, du \, dv. \quad (5.2)$$

Rovnost v (5.2) nastává v případě, že $\mathcal{E} = \mathcal{G}$ a $\mathcal{F} = 0$, tedy v případě konformní parametrizace¹. Dirichletův funkcionál je tedy závislý na parametrizaci, zatímco plošný funkcionál není.

Oba funkcionály v $3(m-1)(n-1)$ proměnných nabývají minima v Bézierově smyslu, protože jsou zdola omezené (integrujeme nezáporné funkce \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{G}), spojitě (spojitě funkce souřadnic $(m-1)(n-1)$ vnitřních bodů řídicí sítě) a nabývají svého infima (můžeme se omezit na vhodnou kompaktní podmnožinu \mathbb{R})².

Poznámka: Protože je parametrizace \mathbf{X} závislá na řídicí síti, zjednodušíme zápis plošného $A_\omega(\mathbf{X})$, resp. Dirichletova $D_\omega(\mathbf{X})$ integrálu na $A(\mathcal{P})$, resp. $D(\mathcal{P})$. \triangleleft

Výsledky následujícího lemmatu převedou daný problém na řešení soustavy lineárních rovnic.

Lemma 5.1 Bézierova plocha s řídicí sítí $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{ij}\}_{i,j=0}^{m,n}$ je extrémem v Bézierově smyslu³ Dirichletova funkcionálu s předepsanou hranicí právě tehdy, když

$$0 = \frac{m^2}{(2m-1)(2n+1)} \binom{m-1}{i} \binom{n}{j} \sum_{k,l=0}^{m-1,n} A_{mi}^k \frac{\binom{n}{l}}{\binom{2n}{j+l}} (P_{k+1,l} - P_{k,l}) + \\ + \frac{n^2}{(2m+1)(2n-1)} \binom{m}{i} \binom{n-1}{j} \sum_{k,l=0}^{m,n-1} A_{nj}^l \frac{\binom{m}{k}}{\binom{2m}{i+k}} (P_{k,l+1} - P_{k,l}), \quad (5.3)$$

¹Tečné vektory $\mathbf{X}(u, \cdot)$, $\mathbf{X}(\cdot, v)$ křivek v každém bodě plochy jsou stejně dlouhé a vzájemně kolmé.

²Pokud se některé body řídicí sítě velmi vzdalují od řídicích bodů hranice, zvětšuje se i povrch plochy.

³Na množině Bézierových ploch.

pro každé $i \in \{1, \dots, m-1\}$ a $j \in \{1, \dots, n-1\}$, kde

$$A_{mi}^k = \frac{mi - mk - i}{(m-i)(2m-1-i-k)} \frac{\binom{m-1}{k}}{\binom{2m-2}{i+k-1}}.$$

Důkaz: Vypočteme gradient Dirichletova funkcionálu vzhledem k souřadnicím bodů $\mathbf{P}_{ij} = (x_{ij}^1, x_{ij}^2, x_{ij}^3)$. Pro každé $a \in \{1, 2, 3\}$, $i \in \{2, \dots, m-1\}$ a $j \in \{2, \dots, n-1\}$ máme

$$\frac{\partial D(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}^a} = \int_{\omega} \left(\left\langle \frac{\partial \mathbf{X}_u}{\partial x_{ij}^a}, \mathbf{X}_u \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}_v}{\partial x_{ij}^a}, \mathbf{X}_v \right\rangle \right) du dv.$$

Spočteme parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}_u}{\partial x_{ij}^a} &= \frac{\partial}{\partial x_{ij}^a} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_{ij}^a} \mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial u} B_i^m(u) B_j^n(v) e^a = \\ &= m (B_{i-1}^{m-1}(u) - B_i^{m-1}(u)) B_j^n(v) e^a, \end{aligned}$$

kde $e^1 = (1, 0, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0)$ a $e^3 = (0, 0, 1)$. Analogicky

$$\frac{\partial \mathbf{X}_v}{\partial x_{ij}^a} = n (B_{j-1}^{n-1}(v) - B_j^{n-1}(v)) B_i^m(u) e^a.$$

Potom

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}^a} &= \int_{\omega} (m (B_{i-1}^{m-1}(u) - B_i^{m-1}(u)) B_j^n(v) \langle e^a, \mathbf{X}_u \rangle + \\ &\quad + n (B_{j-1}^{n-1}(v) - B_j^{n-1}(v)) B_i^m(u) \langle e^a, \mathbf{X}_v \rangle) du dv = \\ &= \int_{\omega} \left(m (B_{i-1}^{m-1}(u) - B_i^{m-1}(u)) B_j^n(v) \left\langle e^a, m \sum_{k,l=0}^{m-1,n} B_k^{m-1}(u) B_l^n(v) (P_{k+1,l} - P_{k,l}) \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. + n (B_{j-1}^{n-1}(v) - B_j^{n-1}(v)) B_i^m(u) \left\langle e^a, n \sum_{k,l=0}^{m,n-1} B_k^m(u) B_l^{n-1}(v) (P_{k,l+1} - P_{k,l}) \right\rangle \right) du dv. \end{aligned}$$

Využijeme-li nyní toho, že pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ a pro libovolné $i = 0, \dots, m$ je $\int_1^0 B_i^m(t) dt = \frac{1}{m+1}$, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}^a} &= \\ &= \frac{m^2}{(2m-1)(2n+1)} \sum_{k,l=0}^{m-1,n} \left(\frac{\binom{m-1}{i-1} \binom{m-1}{k}}{\binom{2m-2}{i+k-1}} - \frac{\binom{m-1}{i} \binom{m-1}{k}}{\binom{2m-2}{i+k}} \right) \frac{\binom{n}{l} \binom{n}{j}}{\binom{2n}{j+l}} \langle e^a, P_{k+1,l} - P_{k,l} \rangle + \end{aligned}$$

$$+ \frac{n^2}{(2m+1)(2n-1)} \sum_{k,l=0}^{m,n-1} \left(\frac{\binom{n-1}{j-1} \binom{n-1}{l}}{\binom{2n-2}{j+l-1}} - \frac{\binom{n-1}{j} \binom{n-1}{l}}{\binom{2n-2}{j+l}} \right) \frac{\binom{m}{k} \binom{m}{i}}{\binom{2m}{i+k}} \langle e^a, P_{k,l+1} - P_{k,l} \rangle.$$

Protože vyjádření Bézierovy plochy je lineárně závislé na koeficientech bodů jsou druhé parciální derivace $\frac{\partial D^2(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}^a \partial x_{kl}^b}$ konstantní. \square

Poznámka: Pro čtvercovou řídicí síť ($m = n$) je podmínka (5.3) jednodušší. \triangleleft

Dalším krokem je dokázat jednoznačnost řešení.

Věta 5.1 *Extrém Dirichletova funkcionálu na množině Bézierových ploch s pevnou hranicí je určen jednoznačně.*

Důkaz: Protože je extrém řešením soustavy lineárních rovnic, můžeme psát

$$AP = B,$$

kde B je sloupcový vektor spočítaný z řídicích bodů na hranici, P je sloupcový vektor vnitřních řídicích bodů a A je **čtvercová** matice, jejíž koeficienty jsou nezávislé na řídicích bodech (závisí pouze na „dimenzi“ řídicí sítě). Lze ukázat, že hodnota matice A je maximální (existuje jediné řešení). Homogenní soustava lineárních rovnic odpovídá hledání minimální plochy pro okrajové body sítě ve tvaru $\mathbf{P}_{i,j} = (\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, 0)$, kde $i \in 0, m, j \in 0, n$. Podle Bernsteinovy věty o minimální ploše (přesná formulace včetně důkazu např. [7], kapitola 2.4, str. 65-67) je pouze rovina minimální plochou, která je grafem funkce. Pro konformní parametrizaci roviny zvolme řídicí síť ve tvaru $\mathcal{P} = \{(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, 0)\}_{i,j=0}^{m,n}$. Pak Bézierova plocha je ve tvaru $\mathbf{X}(u, v) = (u, v, 0)$. Tato plocha je minimální a konformně parametrizovaná, proto je minimem Dirichletova integrálu pro dané okrajové podmínky. Pro jinou řídicí síť \mathcal{P}_0 , jejíž alespoň jeden vnitřní řídicí bod má nenulovou třetí souřadnici, platí

$$D(\mathcal{P}) = A(\mathcal{P}) < A(\mathcal{P}_0) \leq D(\mathcal{P}_0).$$

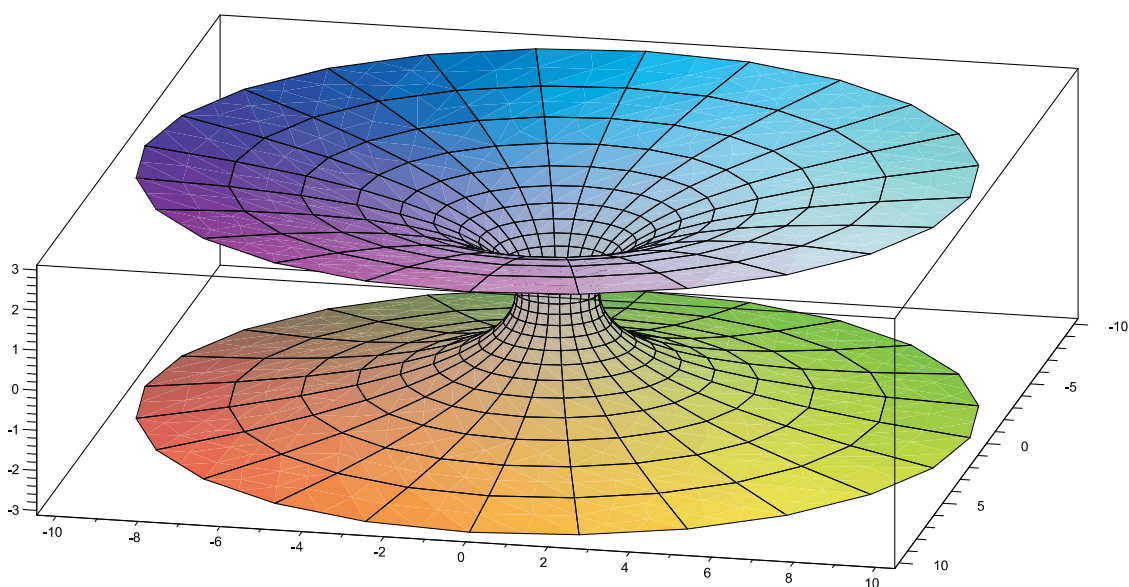
Pro řídicí síť \mathcal{P}_0 , jejíž vnitřní řídicí body mají nulovou třetí souřadnici, ale generují nekonformní parametrizaci, platí

$$D(\mathcal{P}) = A(\mathcal{P}) = A(\mathcal{P}_0) < D(\mathcal{P}_0).$$

Proto je \mathcal{P} jediným Dirichletovým extrémem. \square

Poznámka: Při hledání extrému Dirichletova funkcionálu v Bézierově tvaru dostaneme jedno řešení na rozdíl od hledání minimální plochy pro zadanou hranici. Uvažujme katenoid (rotační plocha s nulovou střední křivostí, Obr. 5.1) s parametrickým vyjádřením $\mathbf{X}(u, v) = [\cosh t \cos u, \cosh t \sin u, t]$, kde $t \in \langle -k, k \rangle, u \in [0, 2\pi)$.

Pokud by hranici tvořily dvě kružnice v rovinách $z = \pm k$, pak plochu této části katenoidu můžeme vyjádřit jako $\frac{\pi}{2} \left(e^{2k} + 4k - \frac{1}{e^{2k}} \right)$. Plochu dvou kruhů vyjádříme jako $2\pi \cosh^2 k$. Pro $k = k_0 = \frac{1}{2}W\left(\frac{1}{e}\right) + \frac{1}{2} \doteq 0,639$ jsou oba povrchy stejné⁴, pro $0 < k < k_0$ je povrch katenoidu menší a pro $k > k_0$ je obsah kruhů větší. O tomto chování se můžeme přesvědčit i na pokusu s drátěnými oky a mýdlovou bublinou. Pokud budou kruhy dostatečně blízko, bublina modeluje katenoid, pokud je budeme od sebe oddalovat, v určitém okamžiku se plocha rozpadne a bublina vyplní obě oka drátu. Další případ nejednoznačnosti je na Obr. 5.2. \triangleleft



Obrázek 5.1: Katenoid

Zbývá ukázat, jak posloupnost Béziových ploch, které minimalizují Dirichletův funkcionál, konverguje k minimální ploše.

Věta 5.2 *Ať $\mathbf{X} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ je konformní parametrizace plochy se zadanou hranicí s minimálním plošným obsahem. Dále ať je \mathbf{Y}_n extrém Dirichletova funkcionálu stupně n s okrajovou křivkou, kterou definují krajní body sítě $\mathcal{P}_n = \left\{ \mathbf{X} \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right\}_{i,j=0}^n$, na množině Béziových ploch. Pak*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\mathbf{Y}_n) = A(\mathbf{X}).$$

Důkaz: Označme \mathbf{X}_n parametrizaci Béziovoy plochy pro řídicí síť \mathcal{P}_n . Z Bernsteina důkazu Weierstrassovy věty plyne, že posloupnost $\{\mathbf{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejno-

⁴W je Lambertova funkce

měrně k \mathbf{X} . Navíc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\mathbf{X}_n) = A(\mathbf{X}) = D(\mathbf{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(\mathbf{X}_n),$$

protože \mathbf{X} je plocha s minimálním povrchem a je parametrizována konformně.

Pokud je \mathbf{Z}_n parametrizace plochy s minimálním povrchem a stejnou hranicí jako \mathbf{Y}_n , pak $A(\mathbf{Z}_n) \leq A(\mathbf{Y}_n)$.

Navíc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A(\mathbf{Y}_n) \leq D(\mathbf{Y}_n)$.

Protože \mathbf{Y}_n je extrém Dirichletova funkcionálu stupně n a má stejnou hranici jako \mathbf{X}_n , máme $D(\mathbf{Y}_n) \leq D(\mathbf{X}_n)$.

Souhrnem předchozího dostáváme $\forall n \in \mathbb{N}$ nerovnost:

$$A(\mathbf{Z}_n) \leq A(\mathbf{Y}_n) \leq D(\mathbf{Y}_n) \leq D(\mathbf{X}_n).$$

Limitním přechodem této nerovnosti získáme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\mathbf{Z}_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A(\mathbf{Y}_n) \leq D(\mathbf{X}) = A(\mathbf{X}).$$

Protože hranice \mathbf{Z}_n konverguje stejnoměrně k hranici \mathbf{X} , je $\lim_{n \rightarrow \infty} A(\mathbf{Z}_n) = A(\mathbf{X})$. \square

Poznámka: Výsledky věty 5.2 ale nejsou využitelné pro konstrukci dobré aproximace nízkého stupně. Pokud řídicí body uvažujeme jako funkční hodnoty plochy, výsledná plocha není její příliš dobrou aproximací pro nízké stupně. \triangleleft

5.1.2 Demonstrační příklady

Příklad 1: Nejznámější polynomiální minimální plochou je Enneperova plocha, Obr. 5.3. Řídicí síť, Tab. 5.1, jejíž vnitřní body jsou řešením soustavy rovnic (5.3), určuje parametrizaci (5.4) Bézierovy plochy.

$$\mathbf{X}(u, v) = \left(\frac{1}{3}(2u - 1)(12v^2 - 4u^2 + 4u - 12v + 5), \right. \\ \left. \frac{1}{3}(2v - 1)(12u^2 - 4v^2 - 12u + 4v + 5), 4(u - v)(u + v - 1) \right) \quad (5.4)$$

Tato parametrizace odpovídá parametrům $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 1]$. Použijeme-li transformaci parametrů $u = \frac{s+1}{2}$, $v = \frac{t+1}{2}$, jsou $s \in [-1, 1]$, $t \in [-1, 1]$ a získáme známější tvar parametrizace

$$\mathbf{X}(s, t) = \left(-\frac{1}{3}s^3 + st^2 + s, -\frac{1}{3}t^3 + ts^2 + t, s^2 - t^2 \right)$$

$$\begin{array}{cccc}
(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0) & (-1, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) & (1, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) & (\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0) \\
(-\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3}) & (-\frac{5}{9}, -\frac{5}{9}, 0) & (\frac{5}{9}, -\frac{5}{9}, 0) & (\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3}) \\
(-\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3}) & (-\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, 0) & (\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, 0) & (\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3}) \\
(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0) & (-1, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) & (1, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) & (\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0)
\end{array}$$

Tabulka 5.1: Řídicí síť Enneperovy plochy

této plochy. Tato plocha je minimální na celém \mathbb{R}^2 . Pro interval $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \times [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ nastává dotyk, Obr. 5.4, a pro interval $[-2, 5; 2, 5] \times [-2, 5; 2, 5]$ už plocha protíná sama sebe, Obr. 5.5.

◁

Příklad 2: V tomto příkladě se zaměříme na tzv. Schwarzův problém. Zjednodušeně řečeno hledáme minimální plochu, jejíž hranicí je zborcený čtyřúhelník. Známou plochou, jejíž hranicí může být zborcený čtyřúhelník, je např. hyperbolický paraboloid. Jeho střední křivost ale není nulová a nespĺňuje tak nutnou podmínku. Hranici tvořené úsečkami (rohy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$) odpovídají řídicí body v Tab. 5.2. Vnitřní body (šedé) jsou body dopočtené. I když zvolíme stupeň Béziera

$$\begin{array}{cccc}
(0, 0, 0) & (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) & (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) & (0, 1, 1) \\
(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}) & (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}) & (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{9}) & (\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}) \\
(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}) & (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}) & (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}) & (\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}) \\
(1, 0, 1) & (1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) & (1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) & (1, 1, 0)
\end{array}$$

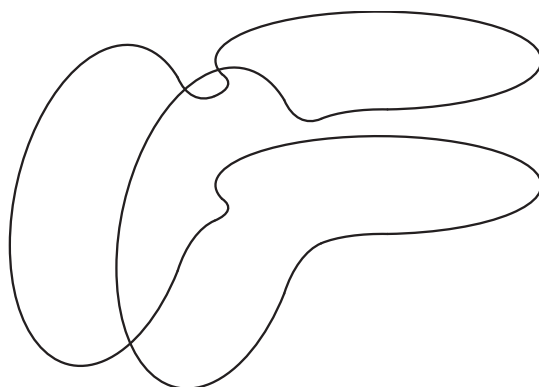
Tabulka 5.2: Řídicí body pro zborcený čtyřúhelník

rovy plochy 3, výsledkem je hyperbolický paraboloid (kvadratická plocha), Obr. 5.6, s rovnicí

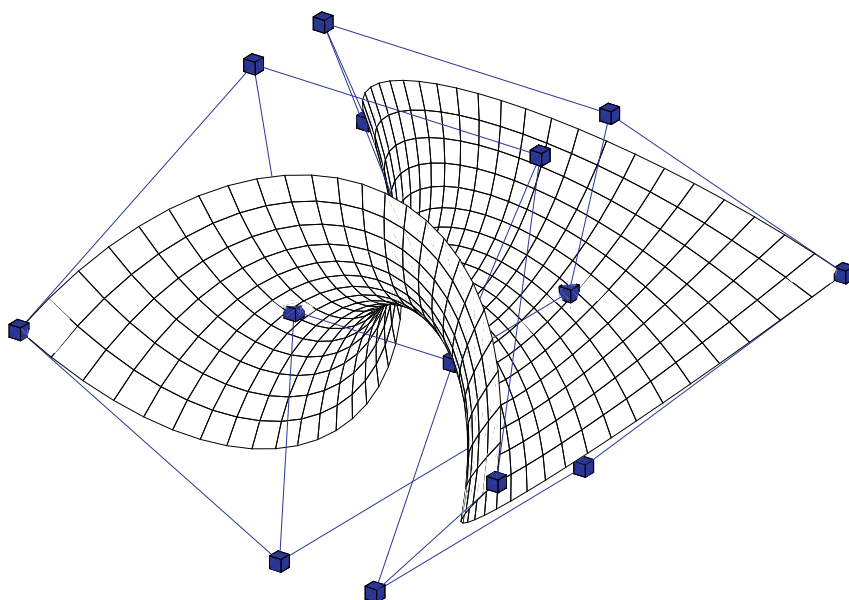
$$\mathbf{X}(u, v) = (u, v, u + v - 2uv). \quad (5.5)$$

Zvyšováním stupně Bernsteinových polynomů nezískáme jiný výsledek než hyperbolický paraboloid.

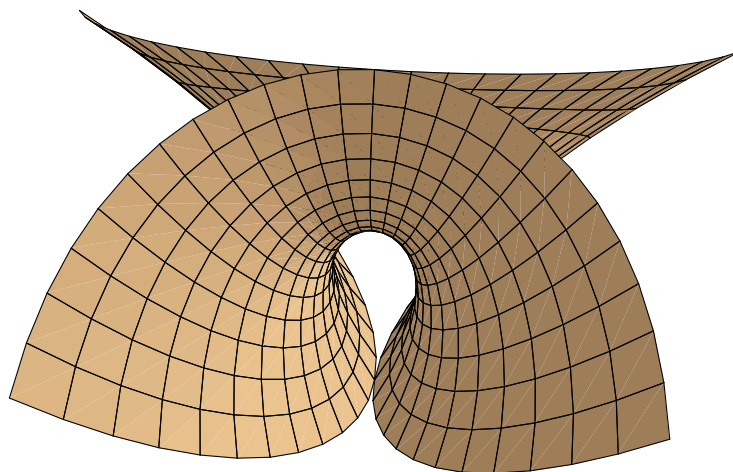
◁



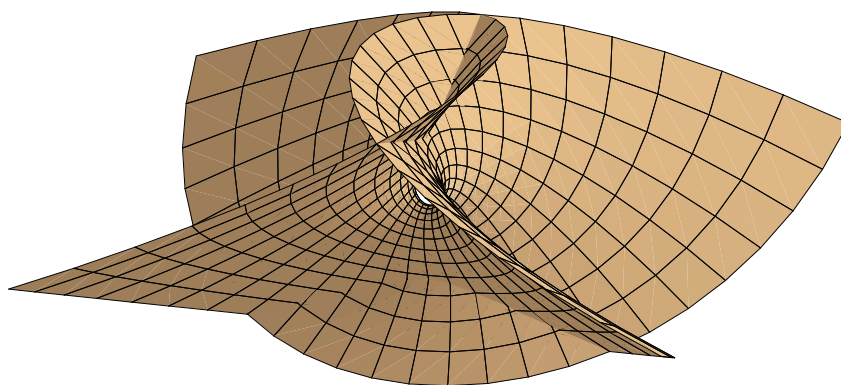
Obrázek 5.2: Hranice, kterou by mýdlová bublina díky její symetrii mohla vyplnit dvěma způsoby



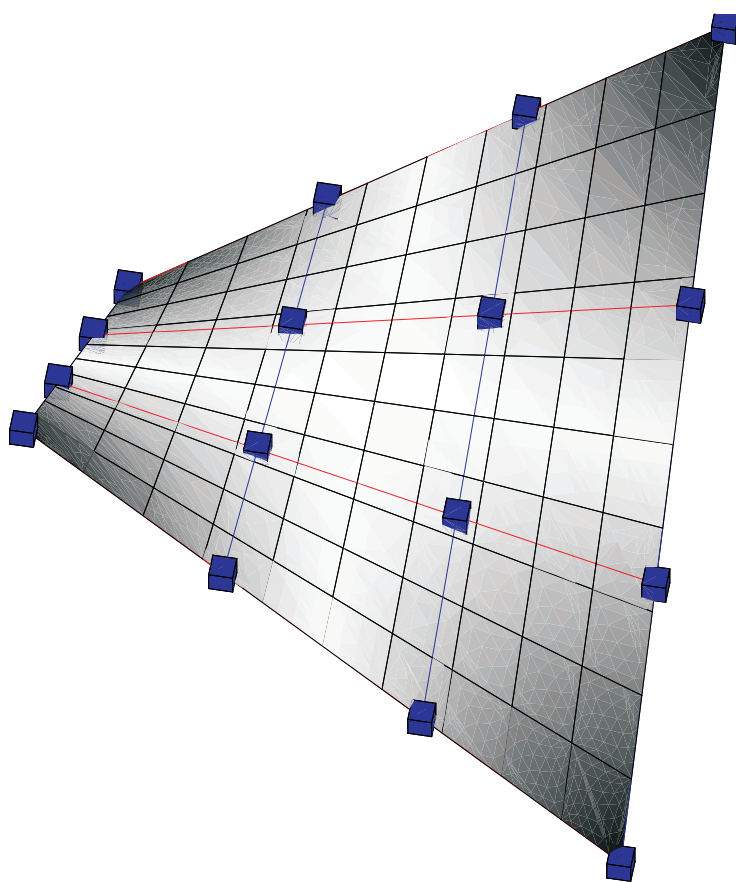
Obrázek 5.3: Enneperova plocha s řídicí sítí



Obrázek 5.4: Enneperova plocha pro parametry $s, t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$



Obrázek 5.5: Enneperova plocha pro parametry $s, t \in [-2, 5; 2, 5]$



Obrázek 5.6: Hyperbolický paraboloid

5.2 Minimální B-spline plocha

5.2.1 Formulace Plateauova B-spline problému

Tento oddíl vychází z článku [24], s tím rozdílem, že postupy a důkazy jsou v této práci mnohem podrobnější. Situace je podobná jako v kapitole 5.1. Hranice B-spline plochy je určena řídicími body $\{P_{ij}\}$, kde $i = 1, m$ a $j = 1, n$. Cílem je tedy sestavit $3(m-2)(n-2)$ podmínek pro výpočet souřadnic vnitřních bodů.

Problém 6 (*Plateauův B-spline*) Pro pevně dané okrajové řídicí body $\{P_{ij}\}_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$ hledejme vnitřní body tak, aby výsledná B-spline plocha měla nejmenší povrch mezi všemi B-spline plochami se stejnými okrajovými řídicími body.

Poznámka: Pro jednoduchost zavedeme v tomto oddíle následující značení. Proměnné polynomů označme u , resp. v . Stupeň polynomů proměnné u , resp. v , označme p , resp. q . Posloupnost $m+p+1$, resp. $n+q+1$, čísel $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{m+p+1}$, resp. $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{n+q+1}$, představuje složky uzlového vektoru.

Pro řídicí síť $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$ a parametry $u \in [u_{p+1}, u_{m+1}]$, $v \in [v_{q+1}, v_{n+1}]$ definujeme parametrizaci B-spline plochy:

$$\mathbf{X}(u, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(u) N_j^q(v) P_{ij},$$

kde $N_i^p(u)$, resp. $N_j^q(v)$, jsou báze B-spline polynomy stupně p , resp. q , proměnné u , resp. v . ◁

Protože se v tomto oddíle zaměřujeme na B-spline plochy, které jsou pouze po částech polynomiální, uvažujme stupně p, q alespoň 3 (výsledná plocha má spojitě parciální derivace až do řádu 2), pokud se hodnoty v uzlovém vektoru neopakují. Pokud by se některé opakovaly, odpovídajícím způsobem zvýšíme stupeň. Stejně jako v kapitole 5.1 se omezíme na hledání minima Dirichletova funkcionálu podle (5.2).

Výsledky následujícího lemmatu, který je obdobný lemmatu 5.1, převedou daný problém na řešení soustavy lineárních rovnic.

Lemma 5.2 B-spline plocha s řídicí sítí $\mathcal{P} = \{P_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$ je extrémem Dirichletova funkcionálu mezi B-spline plochami s předepsanými řídicími body na hranici řídicí

sítě a předepsanými uzlovými vektory právě tehdy, když

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{p^2}{u_{i+p} - u_i} \sum_{k=2}^m \sum_{l=1}^n \frac{\langle \mathbf{e}^a, P_{k,l} - P_{k-1,l} \rangle}{u_{k+p} - u_k} \int_{\omega} C_{ikjl}^{p-1,q} du dv + \\
&- \frac{p^2}{u_{i+1+p} - u_{i+1}} \sum_{k=2}^m \sum_{l=1}^n \frac{\langle \mathbf{e}^a, P_{k,l} - P_{k-1,l} \rangle}{u_{k+p} - u_k} \int_{\omega} C_{i+1,k,j,l}^{p-1,q} du dv + \\
&+ \frac{q^2}{v_{j+q} - v_j} \sum_{k=1}^m \sum_{l=2}^n \frac{\langle \mathbf{e}^a, P_{k,l} - P_{k,l-1} \rangle}{v_{l+q} - v_l} \int_{\omega} C_{ikjl}^{p,q-1} du dv + \\
&- \frac{q^2}{v_{j+1+q} - v_{j+1}} \sum_{k=1}^m \sum_{l=2}^n \frac{\langle \mathbf{e}^a, P_{k,l} - P_{k,l-1} \rangle}{v_{l+q} - v_l} \int_{\omega} C_{i,k,j+1,l}^{p,q-1} du dv,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

pro každé $i \in \{2, \dots, m-1\}$ a $j \in \{2, \dots, n-1\}$, kde

$$\omega = [u_{p+1}, u_{m+1}] \times [v_{q+1}, v_{n+1}],$$

$$C_{ikjl}^{pq} = N_i^p(u) N_k^p(u) N_j^q(v) N_l^q(v).$$

Důkaz: Vypočteme gradient Dirichletova funkcionálu vzhledem k souřadnicím řídicích bodů $P_{ij} = (x_{ij}^1, x_{ij}^2, x_{ij}^3)$. Pro každé $a \in \{1, 2, 3\}$, $i \in \{2, \dots, m-1\}$ a $j \in \{2, \dots, n-1\}$ máme

$$\frac{\partial D(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}^a} = \int_{\omega} \left(\left\langle \frac{\partial \mathbf{X}_u}{\partial x_{ij}^a}, \mathbf{X}_u \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}_v}{\partial x_{ij}^a}, \mathbf{X}_v \right\rangle \right) du dv.$$

Spočteme parciální derivace:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{X}_u}{\partial x_{ij}^a} &= \frac{\partial}{\partial x_{ij}^a} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_{ij}^a} \mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial u} N_i^p(u) N_q^e(v) \mathbf{e}^a = \\
&= \left(\frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_i^{p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+1+p} - u_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(u) \right) N_j^q(v) \mathbf{e}^a,
\end{aligned}$$

kde $\mathbf{e}^1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}^2 = (0, 1, 0)$ a $\mathbf{e}^3 = (0, 0, 1)$. Analogicky

$$\frac{\partial \mathbf{X}_v}{\partial x_{ij}^a} = \left(\frac{q}{v_{j+q} - v_j} N_j^{q-1}(v) - \frac{q}{v_{j+1+q} - v_{j+1}} N_{j+1}^{q-1}(v) \right) N_i^p(u) \mathbf{e}^a.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}^a} &= \\
&= \int_{\omega} \left[\left(\frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_i^{p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+1+p} - u_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(u) \right) N_j^q(v) \langle \mathbf{e}^a, \mathbf{X}_u \rangle + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{q}{v_{j+q} - v_j} N_j^{q-1}(v) - \frac{q}{v_{j+1+q} - v_{j+1}} N_{j+1}^{q-1}(v) \right) N_i^p(u) \langle \mathbf{e}^a, \mathbf{X}_v \rangle \right] du dv = \\
&= \int_{\omega} \left[\left(\frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_i^{p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+1+p} - u_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(u) \right) N_j^q(v) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \sum_{k=2}^m \sum_{l=1}^n \frac{p}{u_{k+p} - u_k} N_k^{p-1}(u) N_l^q(v) \langle \mathbf{e}^a, P_{k,l} - P_{k-1,l} \rangle + \\
&\quad + \left. \left(\frac{q}{v_{j+q} - v_j} N_j^{q-1}(v) - \frac{q}{v_{j+1+q} - v_{j+1}} N_{j+1}^{q-1}(v) \right) N_i^p(u) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \sum_{k=1}^m \sum_{l=2}^n \frac{q}{v_{l+q} - v_l} N_l^{q-1}(v) N_k^p(u) \langle \mathbf{e}^a, P_{k,l} - P_{k,l-1} \rangle \right] du dv = \\
&= \frac{p^2}{u_{i+p} - u_i} \sum_{k=2}^m \sum_{l=1}^n \frac{\langle \mathbf{e}^a, P_{k,l} - P_{k-1,l} \rangle}{u_{k+p} - u_k} \int_{\omega} C_{ikjl}^{p-1,q} du dv + \\
&- \frac{p^2}{u_{i+1+p} - u_{i+1}} \sum_{k=2}^m \sum_{l=1}^n \frac{\langle \mathbf{e}^a, P_{k,l} - P_{k-1,l} \rangle}{u_{k+p} - u_k} \int_{\omega} C_{i+1,k,j,l}^{p-1,q} du dv + \\
&+ \frac{q^2}{v_{j+q} - v_j} \sum_{k=1}^m \sum_{l=2}^n \frac{\langle \mathbf{e}^a, P_{k,l} - P_{k,l-1} \rangle}{v_{l+q} - v_l} \int_{\omega} C_{ikjl}^{p,q-1} du dv + \\
&- \frac{q^2}{v_{j+1+q} - v_{j+1}} \sum_{k=1}^m \sum_{l=2}^n \frac{\langle \mathbf{e}^a, P_{k,l} - P_{k,l-1} \rangle}{v_{l+q} - v_l} \int_{\omega} C_{i,k,j+1,l}^{p,q-1} du dv.
\end{aligned}$$

Protože vyjádření B-spline plochy je lineárně závislé na souřadnicích bodů, jsou druhé parciální derivace $\frac{\partial D^2(\mathcal{P})}{\partial x_{ij}^a \partial x_{kl}^b}$ konstantní. \square

Zbývá ukázat jednoznačnost a konvergenci řešení.

Věta 5.3 *Extrém Dirichletova funkcionálu na množině B-spline ploch s pevnou hranicí a předepsanými uzlovými vektory je určen jednoznačně.*

Důkaz: Ve stejném sledu jako důkaz věty 5.1. \square

Poznámka: Z důkazu lemmatu 5.1 je patrné, že výsledná podmínka pro Bézierovu minimální plochu nezávisí na Bernsteinových polynomech (bázových funkcích). Podmínky (5.6) pro B-spline plochu ale závisejí na bázových funkcích $N_i^p(u)$, $N_j^q(v)$,

a tedy i na uzlových vektorech $(u_1, \dots, u_{m+p+1}), (v_1, \dots, v_{n+q+1})$. Uzlové vektory obecně určují i jinou hraniční křivku. V oddílu 5.2.2 je uveden příklad 3. \triangleleft

Věta 5.4 *Ať $\mathbf{X} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ je konformní parametrizace plochy se zadanou hranicí s minimálním plošným obsahem. Dále ať je \mathbf{Y}_n extrém Dirichletova funkcionálu stupně n s okrajovou křivkou, kterou definují krajní body sítě $\mathcal{P}_n = \{\mathbf{X}(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})\}_{i,j=0}^n$, na množině B-spline ploch s předepsanými uzlovými vektory. Pak*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\mathbf{Y}_n) = A(\mathbf{X}).$$

Důkaz: Do obou uzlových roztečí vložíme každý stávající uzel tolikrát, aby násobnost každého vnitřního uzlu byla rovna stupni polynomu a násobnost počátečního a koncového uzlu ještě o 1 větší než stupeň polynomu (algoritmus je podrobně popsán v oddílu 4.2.1). Podobně jako ve větě 4.3, na každé nenulové uzlové rozteči je určena Bézierova plocha, pro kterou platí věta 5.2. \square

Poznámka: Pokud je zvoleno více bodů pro určení hraniční křivky, např. $\{P_{i,j}\}$, kde $i \in \{1, \dots, m_0, m_1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n_0, n_1, \dots, n\}$, $0 \leq m_0 < m_1 \leq m$ a $0 \leq n_0 < n_1 \leq n$, pak platí podmínky (5.6) pro $i \in \{m_0 + 1, \dots, m_1 - 1\}$ a $j \in \{n_0 + 1, \dots, n_1 - 1\}$. Jednodušší postup, jak získat požadovanou křivku na hranici, je využití ukotvených B-splinů, které obsahují na začátku a na konci $p + 1$, resp. $q + 1$, násobných uzlů, tedy volba nosičů

$$\{u_1 = u_2 = \dots = u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq \dots \leq u_m \leq u_{m+1} = u_{m+2} = \dots = u_{m+p+1}\},$$

$$\{v_1 = v_2 = \dots = v_{q+1} \leq v_{p+2} \leq \dots \leq v_n \leq v_{n+1} = v_{n+2} = \dots = v_{n+q+1}\}.$$

Navíc ukotvená B-spline křivka se dá převést na otevřenou. Speciálně pro volbu

$$(u_1, \dots, u_{p+1}, u_{m+1}, \dots, u_{m+p+1}) = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1),$$

resp.

$$(v_1, \dots, v_{q+1}, v_{n+1}, \dots, v_{n+q+1}) = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1),$$

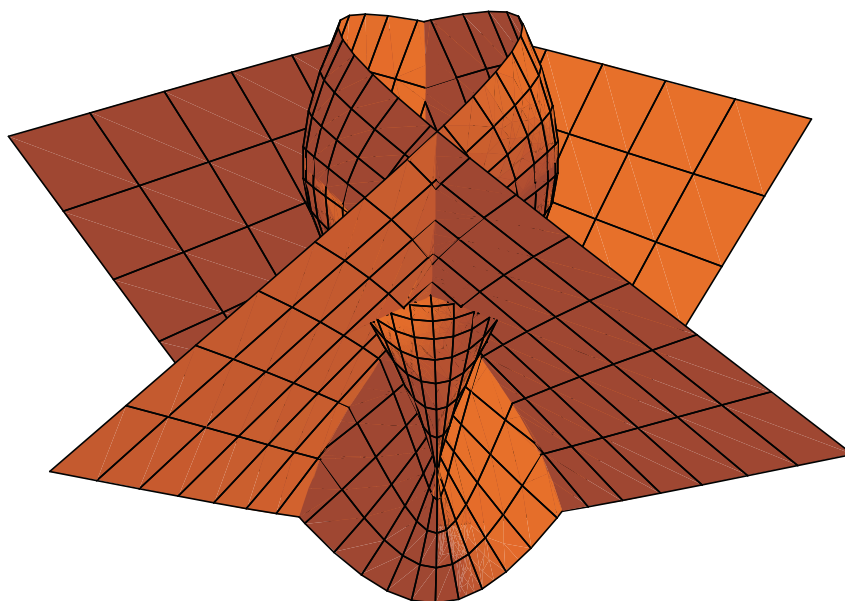
získáme plochu vyjádřenou jako Bézierovu. \triangleleft

5.2.2 Demonstrační příklady

Příklad 3: Tento příklad ukazuje závislost hraničních bodů sítě (ovlivňují křivku na hranici výsledné plochy) na volbě uzlového vektoru. Zvolme shodně stupeň polynomů

$p = 3 = q$. Pro tabulku 5.3, dopočteme 4 vnitřní body. Nejprve pro uzlové vektory $U_1 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$, $V_1 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ a poté pro uzlové vektory $U_2 = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$, $V_2 = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$.

Pro první variantu získáme tabulku totožnou s Tab. 5.1 a Enneperovu plochu vyjádřenou rovnicí (5.4)⁵. Obrázek by byl totožný s Obr. 5.3. Pro druhou dvojici uzlových vektorů získáme Tab. 5.4, parametrizaci (5.7) a Obr. 5.7.



Obrázek 5.7: B-spline plocha

$$\mathbf{X}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{2v-1}{607041} [117600uv(u+v-uv-1) + 61102v(v-1) + 252498u(u-1) + 51313], \\ \frac{2u-1}{607041} [117600uv(u+v-uv-1) + 61102u(u-1) + 252498v(v-1) + 51313], \\ -\frac{2}{3}(u-v)(u+v-1) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Parametrizace (5.7) neodpovídá Enneperově ploše, protože je vyššího stupně. Ze společného obrázku, Obr. 5.8, obou ploch ale zřetelně vidíme, že nemají společnou hraniční křivku a povrch druhé plochy je podstatně menší.

◁

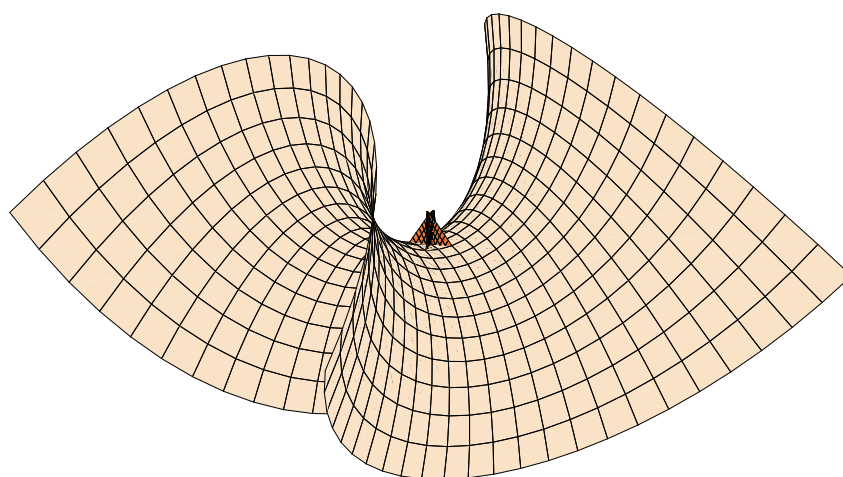
⁵Pro tuto volbu uzlového vektoru získáváme plochu vyjádřenou jako Bézierovu.

$(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0)$	$(-1, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$	$(1, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$	$(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0)$
$(-\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3})$			$(\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3})$
$(-\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3})$			$(\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3})$
$(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0)$	$(-1, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$	$(1, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$	$(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0)$

Tabulka 5.3: Řídicí síť (hranice)

$(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0)$	$(-1, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$	$(1, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$	$(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0)$
$(-\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3})$	$(\frac{14795}{67449}, \frac{14795}{67449}, 0)$	$(-\frac{14795}{67449}, \frac{14795}{67449}, 0)$	$(\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3})$
$(-\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3})$	$(\frac{14795}{67449}, -\frac{14795}{67449}, 0)$	$(-\frac{14795}{67449}, -\frac{14795}{67449}, 0)$	$(\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3})$
$(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0)$	$(-1, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$	$(1, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$	$(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0)$

Tabulka 5.4: Řídicí síť (po výpočtu)



Obrázek 5.8: B-spline plocha

Příklad 4: Opět zvolme shodně stupeň bázových funkcí $p = 3 = q$. A uzlové vektory

$$U_1 = (0, 0, 0, 0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1, 1, 1, 1),$$

$$V_1 = (0, 0, 0, 0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1, 1, 1, 1),$$

$$U_2 = (0, 0, 0, 0, 1/8, 1/4, 1/2, 3/4, 7/8, 1, 1, 1, 1),$$

$$V_2 = (0, 0, 0, 0, 1/8, 1/4, 1/2, 3/4, 7/8, 1, 1, 1, 1).$$

Pro dvojici U_1, V_1 vypočteme body v krajních polích Tab. 5.5, aby křivka na hranici odpovídala hranici Enneperovy plochy dané parametrizací (5.4). Po dopočtení vnitřních bodů v Tab. 5.5 (šedé), dostaneme na všech podintervalech intervalu $[0, 1] \times [0, 1]$ stejné parametrické vyjádření, a proto ho můžeme shrnout do vyjádření totožného s (5.4). Pro dvojici U_2, V_2 vypočteme body v krajních polích Tab. 5.6, aby křivka na hranici opět odpovídala hranici Enneperovy plochy dané parametrizací (5.4). Z Tab. 5.5 a Tab. 5.6 je patrné, že i výpočet hraničních bodů je závislý na uzlovém vektoru. Po dopočtení vnitřních bodů v Tab. 5.6 (šedé), dostaneme na všech podintervalech intervalu $[0, 1] \times [0, 1]$ opět stejné parametrické vyjádření, které shrnuje vyjádření (5.4). \triangleleft

Příklad 5: Pro stupeň bázových funkcí $p = 3 = q$ a uzlové vektory

$$U_1 = (0, 0, 0, 0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1, 1, 1, 1),$$

$$V_1 = (0, 0, 0, 0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1, 1, 1, 1),$$

$$U_2 = (-1/2, -1/3, -1/6, 0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1, 7/6, 4/3, 3/2),$$

$$V_2 = (-1/2, -1/3, -1/6, 0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1, 7/6, 4/3, 3/2),$$

vypočteme hraniční body, které jsou uvedené v Tab. 5.5 pro U_1, V_1 , resp. v Tab. 5.7 pro U_2, V_2 . V obou případech získáme parametrické vyjádření (5.4) na všech aktivních podintervalech. V prvním případě se jedná o ukotvenou B-spline plochu a řešíme soustavu pro 64 vnitřních bodů (šedé body v Tab. 5.5). Ve druhém případě, řešíme soustavu pouze pro 9 bodů (šedé body v Tab. 5.7), ale je zase početně mnohem náročnější najít 72 bodů jako vstupních hodnot. \triangleleft

$(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0)$	$(-\frac{3}{2}, -\frac{19}{12}, \frac{1}{6})$	$(-\frac{29}{24}, -\frac{11}{8}, \frac{11}{24})$	$(-\frac{19}{24}, -\frac{5}{6}, \frac{7}{8})$	$(-\frac{7}{12}, 0, \frac{13}{12})$	$(-\frac{19}{24}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8})$	$(-\frac{29}{24}, \frac{11}{8}, \frac{11}{24})$	$(-\frac{3}{2}, \frac{19}{12}, \frac{1}{6})$	$(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0)$
$(-\frac{19}{12}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{6})$	$(-\frac{103}{72}, -\frac{103}{72}, 0)$	$(-\frac{335}{288}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{24})$	$(-\frac{25}{32}, -\frac{55}{72}, \frac{17}{24})$	$(-\frac{85}{144}, 0, \frac{11}{12})$	$(-\frac{25}{32}, \frac{55}{72}, \frac{17}{24})$	$(-\frac{335}{288}, \frac{5}{4}, \frac{7}{24})$	$(-\frac{103}{72}, \frac{103}{72}, 0)$	$(-\frac{19}{12}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{6})$
$(-\frac{11}{8}, -\frac{29}{24}, -\frac{11}{24})$	$(-\frac{5}{4}, -\frac{335}{288}, -\frac{7}{24})$	$(-\frac{33}{32}, -\frac{33}{32}, 0)$	$(-\frac{23}{32}, \frac{185}{288}, \frac{5}{12})$	$(-\frac{9}{16}, 0, \frac{5}{8})$	$(-\frac{23}{32}, \frac{185}{288}, \frac{5}{12})$	$(-\frac{33}{32}, \frac{33}{32}, 0)$	$(-\frac{5}{4}, \frac{335}{288}, -\frac{7}{24})$	$(-\frac{11}{8}, \frac{29}{24}, -\frac{11}{24})$
$(-\frac{5}{6}, -\frac{19}{24}, -\frac{7}{8})$	$(-\frac{55}{72}, -\frac{25}{32}, -\frac{17}{24})$	$(-\frac{185}{288}, -\frac{23}{32}, -\frac{5}{12})$	$(-\frac{15}{32}, -\frac{15}{32}, 0)$	$(-\frac{55}{144}, 0, \frac{5}{24})$	$(-\frac{15}{32}, \frac{15}{32}, 0)$	$(-\frac{185}{288}, \frac{23}{32}, -\frac{5}{12})$	$(-\frac{55}{72}, \frac{25}{32}, -\frac{17}{24})$	$(-\frac{5}{6}, \frac{19}{24}, -\frac{7}{8})$
$(0, \frac{7}{12}, -\frac{13}{12})$	$(0, -\frac{85}{144}, -\frac{11}{12})$	$(0, -\frac{9}{16}, -\frac{5}{8})$	$(0, -\frac{55}{144}, -\frac{5}{24})$	$(0, 0, 0)$	$(0, \frac{55}{144}, -\frac{5}{24})$	$(0, \frac{9}{16}, -\frac{5}{8})$	$(0, \frac{85}{144}, -\frac{11}{12})$	$(0, \frac{7}{12}, \frac{13}{12})$
$(\frac{5}{6}, -\frac{19}{24}, -\frac{7}{8})$	$(\frac{55}{72}, -\frac{25}{32}, -\frac{17}{24})$	$(\frac{185}{288}, -\frac{23}{32}, -\frac{5}{12})$	$(\frac{15}{32}, -\frac{15}{32}, 0)$	$(\frac{55}{144}, 0, \frac{5}{24})$	$(\frac{15}{32}, \frac{15}{32}, 0)$	$(\frac{185}{288}, \frac{23}{32}, -\frac{5}{12})$	$(\frac{55}{72}, \frac{25}{32}, -\frac{17}{24})$	$(\frac{5}{6}, \frac{19}{24}, -\frac{7}{8})$
$(\frac{11}{8}, -\frac{29}{24}, -\frac{11}{24})$	$(\frac{5}{4}, -\frac{335}{288}, -\frac{7}{24})$	$(\frac{33}{32}, -\frac{33}{32}, 0)$	$(\frac{23}{32}, -\frac{185}{288}, \frac{5}{12})$	$(\frac{9}{16}, 0, \frac{5}{8})$	$(\frac{23}{32}, \frac{185}{288}, \frac{5}{12})$	$(\frac{33}{32}, \frac{33}{32}, 0)$	$(\frac{5}{4}, \frac{335}{288}, -\frac{7}{24})$	$(\frac{11}{8}, \frac{29}{24}, -\frac{11}{24})$
$(\frac{19}{12}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{6})$	$(\frac{103}{72}, -\frac{103}{72}, 0)$	$(\frac{335}{288}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{24})$	$(\frac{25}{32}, -\frac{55}{72}, \frac{17}{24})$	$(\frac{85}{144}, 0, \frac{11}{12})$	$(\frac{25}{32}, \frac{55}{72}, \frac{17}{24})$	$(\frac{335}{288}, \frac{5}{4}, \frac{7}{24})$	$(\frac{103}{72}, \frac{103}{72}, 0)$	$(\frac{19}{12}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{6})$
$(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0)$	$(\frac{3}{2}, -\frac{19}{12}, \frac{1}{6})$	$(\frac{29}{24}, -\frac{11}{8}, \frac{11}{24})$	$(\frac{19}{24}, -\frac{5}{6}, \frac{7}{8})$	$(\frac{7}{12}, 0, \frac{13}{12})$	$(\frac{19}{24}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8})$	$(\frac{29}{24}, \frac{11}{8}, \frac{11}{24})$	$(\frac{3}{2}, \frac{19}{12}, \frac{1}{6})$	$(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0)$

Tabulka 5.5: Řídící síť (po výpočtu) - ukotvená B-spline, uzlové vektory U_1, V_1

$(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{9}, 0)$	$(-\frac{13}{9}, -\frac{14}{9}, \frac{2}{9})$	$(-\frac{29}{27}, -\frac{34}{27}, \frac{16}{27})$	$(-\frac{20}{27}, \frac{2}{3}, \frac{25}{27})$	$(-\frac{17}{27}, 0, \frac{28}{27})$	$(-\frac{20}{27}, -\frac{2}{3}, \frac{25}{27})$	$(-\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{2}{9})$	$(-\frac{29}{27}, \frac{34}{27}, \frac{16}{27})$	$(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{9}, 0)$
$(-\frac{14}{9}, -\frac{13}{9}, -\frac{2}{9})$	$(-\frac{110}{81}, -\frac{110}{81}, 0)$	$(-\frac{250}{243}, -\frac{10}{9}, \frac{10}{27})$	$(-\frac{178}{243}, \frac{16}{27}, \frac{19}{27})$	$(-\frac{154}{243}, 0, \frac{22}{27})$	$(-\frac{178}{243}, -\frac{16}{27}, \frac{19}{27})$	$(-\frac{110}{81}, \frac{110}{81}, 0)$	$(-\frac{250}{243}, \frac{10}{9}, \frac{10}{27})$	$(-\frac{14}{9}, \frac{13}{9}, -\frac{2}{9})$
$(-\frac{34}{27}, -\frac{29}{27}, -\frac{16}{27})$	$(-\frac{10}{9}, -\frac{250}{243}, -\frac{10}{27})$	$(-\frac{70}{81}, -\frac{70}{81}, 0)$	$(-\frac{52}{81}, -\frac{38}{81}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{46}{81}, 0, \frac{4}{9})$	$(-\frac{52}{81}, -\frac{38}{81}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{10}{9}, \frac{250}{243}, -\frac{10}{27})$	$(-\frac{70}{81}, \frac{70}{81}, 0)$	$(-\frac{34}{27}, \frac{29}{27}, -\frac{16}{27})$
$(-\frac{2}{3}, -\frac{20}{27}, -\frac{25}{27})$	$(-\frac{16}{27}, -\frac{178}{243}, -\frac{19}{27})$	$(-\frac{38}{81}, -\frac{52}{81}, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{29}{81}, -\frac{29}{81}, 0)$	$(-\frac{26}{81}, 0, \frac{1}{9})$	$(-\frac{29}{81}, \frac{29}{81}, 0)$	$(-\frac{16}{27}, \frac{178}{243}, -\frac{19}{27})$	$(-\frac{38}{81}, \frac{52}{81}, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{2}{3}, \frac{20}{27}, -\frac{25}{27})$
$(0, -\frac{17}{27}, -\frac{28}{27})$	$(0, -\frac{154}{243}, -\frac{22}{27})$	$(0, -\frac{46}{81}, -\frac{4}{9})$	$(0, -\frac{26}{81}, -\frac{1}{9})$	$(0, 0, 0)$	$(0, \frac{26}{81}, -\frac{1}{9})$	$(0, -\frac{154}{243}, \frac{22}{27})$	$(0, \frac{46}{81}, -\frac{4}{9})$	$(0, \frac{17}{27}, -\frac{28}{27})$
$(\frac{2}{3}, -\frac{20}{27}, -\frac{25}{27})$	$(\frac{16}{27}, -\frac{178}{243}, -\frac{19}{27})$	$(\frac{38}{81}, -\frac{52}{81}, -\frac{1}{3})$	$(\frac{29}{81}, -\frac{29}{81}, 0)$	$(\frac{26}{81}, 0, \frac{1}{9})$	$(\frac{29}{81}, \frac{29}{81}, 0)$	$(\frac{16}{27}, \frac{178}{243}, -\frac{19}{27})$	$(\frac{38}{81}, \frac{52}{81}, -\frac{1}{3})$	$(\frac{2}{3}, \frac{20}{27}, -\frac{25}{27})$
$(\frac{34}{27}, -\frac{29}{27}, -\frac{16}{27})$	$(\frac{10}{9}, -\frac{250}{243}, -\frac{10}{27})$	$(\frac{70}{81}, -\frac{70}{81}, 0)$	$(\frac{52}{81}, -\frac{38}{81}, \frac{1}{3})$	$(\frac{46}{81}, 0, \frac{4}{9})$	$(\frac{52}{81}, \frac{38}{81}, \frac{1}{3})$	$(\frac{10}{9}, \frac{250}{243}, -\frac{10}{27})$	$(\frac{70}{81}, \frac{70}{81}, 0)$	$(\frac{34}{27}, \frac{29}{27}, -\frac{16}{27})$
$(\frac{14}{9}, -\frac{13}{9}, -\frac{2}{9})$	$(\frac{110}{81}, -\frac{110}{81}, 0)$	$(\frac{250}{243}, -\frac{10}{9}, \frac{10}{27})$	$(\frac{178}{243}, -\frac{16}{27}, \frac{19}{27})$	$(\frac{154}{243}, 0, \frac{22}{27})$	$(\frac{178}{243}, \frac{16}{27}, \frac{19}{27})$	$(\frac{110}{81}, \frac{110}{81}, 0)$	$(\frac{250}{243}, \frac{10}{9}, \frac{10}{27})$	$(\frac{14}{9}, \frac{13}{9}, -\frac{2}{9})$
$(\frac{5}{3}, -\frac{5}{9}, 0)$	$(\frac{13}{9}, -\frac{14}{9}, \frac{2}{9})$	$(\frac{29}{27}, -\frac{34}{27}, \frac{16}{27})$	$(\frac{20}{27}, -\frac{2}{3}, \frac{25}{27})$	$(\frac{17}{27}, 0, \frac{28}{27})$	$(\frac{20}{27}, \frac{2}{3}, \frac{25}{27})$	$(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{2}{9})$	$(\frac{29}{27}, \frac{34}{27}, \frac{16}{27})$	$(\frac{5}{3}, -\frac{5}{9}, 0)$

Tabulka 5.6: Řídící síť (po výpočtu) - ukotvená B-spline, uzlové vektory U_2, V_2

$(-\frac{236}{81}, -\frac{236}{81}, 0)$	$(-\frac{152}{81}, -\frac{22}{9}, \frac{7}{9})$	$(-\frac{92}{81}, -\frac{142}{81}, \frac{4}{3})$	$(-\frac{56}{81}, -\frac{74}{81}, \frac{5}{3})$	$(-\frac{44}{81}, 0, \frac{16}{9})$	$(-\frac{56}{81}, -\frac{74}{81}, \frac{5}{3})$	$(-\frac{92}{81}, \frac{142}{81}, \frac{4}{3})$	$(-\frac{152}{81}, \frac{22}{9}, \frac{7}{9})$	$(-\frac{236}{81}, \frac{236}{81}, 0)$
$(-\frac{22}{9}, -\frac{152}{81}, -\frac{7}{9})$	$(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0)$	$(-\frac{10}{9}, -\frac{100}{81}, \frac{5}{9})$	$(-\frac{7}{9}, \frac{53}{81}, \frac{8}{9})$	$(-\frac{2}{3}, 0, 1)$	$(-\frac{7}{9}, \frac{53}{81}, \frac{8}{9})$	$(-\frac{10}{9}, \frac{100}{81}, \frac{5}{9})$	$(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0)$	$(-\frac{22}{9}, \frac{152}{81}, -\frac{7}{9})$
$(-\frac{142}{81}, -\frac{92}{81}, -\frac{4}{3})$	$(-\frac{100}{81}, -\frac{10}{9}, -\frac{5}{9})$	$(-\frac{70}{81}, -\frac{70}{81}, 0)$	$(-\frac{52}{81}, -\frac{38}{81}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{46}{81}, 0, \frac{4}{9})$	$(-\frac{52}{81}, \frac{38}{81}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{70}{81}, \frac{70}{81}, 0)$	$(-\frac{100}{81}, \frac{10}{9}, -\frac{5}{9})$	$(-\frac{142}{81}, \frac{92}{81}, -\frac{4}{3})$
$(-\frac{74}{81}, -\frac{56}{81}, -\frac{5}{3})$	$(-\frac{53}{81}, -\frac{7}{9}, -\frac{8}{9})$	$(-\frac{38}{81}, -\frac{52}{81}, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{29}{81}, -\frac{29}{81}, 0)$	$(-\frac{26}{81}, 0, \frac{1}{9})$	$(-\frac{29}{81}, \frac{29}{81}, 0)$	$(-\frac{38}{81}, \frac{52}{81}, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{53}{81}, \frac{7}{9}, -\frac{8}{9})$	$(-\frac{74}{81}, \frac{56}{81}, -\frac{5}{3})$
$(0, -\frac{44}{81}, -\frac{16}{9})$	$(0, -\frac{2}{3}, -1)$	$(0, -\frac{46}{81}, -\frac{4}{9})$	$(0, -\frac{26}{81}, -\frac{1}{9})$	$(0, 0, 0)$	$(0, \frac{26}{81}, -\frac{1}{9})$	$(0, \frac{46}{81}, -\frac{4}{9})$	$(0, \frac{2}{3}, -1)$	$(0, \frac{44}{81}, -\frac{16}{9})$
$(\frac{74}{81}, -\frac{56}{81}, -\frac{5}{3})$	$(\frac{53}{81}, -\frac{7}{9}, -\frac{8}{9})$	$(\frac{38}{81}, -\frac{52}{81}, -\frac{1}{3})$	$(\frac{29}{81}, -\frac{29}{81}, 0)$	$(\frac{26}{81}, 0, \frac{1}{9})$	$(\frac{29}{81}, \frac{29}{81}, 0)$	$(\frac{38}{81}, \frac{52}{81}, -\frac{1}{3})$	$(\frac{53}{81}, \frac{7}{9}, -\frac{8}{9})$	$(\frac{74}{81}, \frac{56}{81}, -\frac{5}{3})$
$(\frac{142}{81}, -\frac{92}{81}, -\frac{4}{3})$	$(\frac{100}{81}, -\frac{10}{9}, -\frac{5}{9})$	$(\frac{70}{81}, -\frac{70}{81}, 0)$	$(\frac{52}{81}, -\frac{38}{81}, \frac{1}{3})$	$(\frac{46}{81}, 0, \frac{4}{9})$	$(\frac{52}{81}, \frac{38}{81}, \frac{1}{3})$	$(\frac{70}{81}, \frac{70}{81}, 0)$	$(\frac{100}{81}, \frac{10}{9}, -\frac{5}{9})$	$(\frac{142}{81}, \frac{92}{81}, -\frac{4}{3})$
$(\frac{22}{9}, -\frac{152}{81}, -\frac{7}{9})$	$(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0)$	$(\frac{10}{9}, -\frac{100}{81}, \frac{5}{9})$	$(\frac{7}{9}, -\frac{53}{81}, \frac{8}{9})$	$(\frac{2}{3}, 0, 1)$	$(\frac{7}{9}, \frac{53}{81}, \frac{8}{9})$	$(\frac{10}{9}, \frac{100}{81}, \frac{5}{9})$	$(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0)$	$(\frac{22}{9}, \frac{152}{81}, -\frac{7}{9})$
$(\frac{236}{81}, -\frac{236}{81}, 0)$	$(\frac{152}{81}, -\frac{22}{9}, \frac{7}{9})$	$(\frac{92}{81}, -\frac{142}{81}, \frac{4}{3})$	$(\frac{56}{81}, -\frac{74}{81}, \frac{5}{3})$	$(\frac{44}{81}, 0, \frac{16}{9})$	$(\frac{56}{81}, \frac{74}{81}, \frac{5}{3})$	$(\frac{92}{81}, \frac{142}{81}, \frac{4}{3})$	$(\frac{152}{81}, \frac{22}{9}, \frac{7}{9})$	$(\frac{236}{81}, \frac{236}{81}, 0)$

Tabulka 5.7: Řídicí síť (po výpočtu) - pevně zadané 3 krajní sloupce a řádky

Kapitola 6

Modelování počátečního rovnovážného stavu membránové konstrukce

Nejčastěji využívané numerické metody při hledání vhodného tvaru membránové konstrukce shrnuje tato kapitola. U některých metod je v poznámce uveden anglický název kvůli nejednoznačnosti českých překladů. Výklad pojmů z mechaniky nalezneme např. v [4].

Mezi numerickými metodami jsou dvě výrazné skupiny. Jedna přirovnává membránovou konstrukci k lanové síti (pracuje s hustotami sil a délkou lan) a druhá skupina, která se dívá na membránu jako na plochu (aproximovanou konečnými prvky, protože hledání parametrického vyjádření obecně je prakticky nemožné).

Pro srovnání jednotlivých metod byl vybrán jednoduchý příklad (pevnou hranicí je zborcený čtyřúhelník), aby na něj byly všechny metody aplikovatelné. Srovnávacích kritérií může být mnoho - náročnost zadávání vstupních dat, výpočtová rychlost nebo třeba praktická využitelnost výsledku (pro vstupní hodnoty existuje řešení, které ale není použitelné v praxi, a vstupní hodnoty je nutné přehodnotit a upravit). Programy jsou napsány v programu Maple, vstupní data (pokud je jich mnoho) jsou zadávána v Excelu.

6.1 Metoda sítě ¹

Metoda sítě je jednou z nejjednodušších. Její základy můžeme nalézt v [21]. Je založena na faktu, že horizontální síly jsou v rovnováze a neznámé výšky uzlů mřížky jsou vypočítány při určování rovnováhy vertikálních sil. Membránovou konstrukci modeluje čtyřúhelníková lanová síť, o níž předpokládáme, že kolmé průměty lan

¹*Grid Method.*

jsou ortogonální v každém uzlu a že spojnice mezi uzly jsou úsečky. Pro jeden uzel, Obr. 6.1, můžeme z nelineární rovnice rovnováhy

$$T_{ij} \frac{x_j - x_i}{L_{ij}} + T_{ik} \frac{x_k - x_i}{L_{ik}} + T_{il} \frac{x_l - x_i}{L_{il}} + T_{im} \frac{x_m - x_i}{L_{im}} + F_{xi} = 0, \quad (6.1)$$

$$T_{ij} \frac{y_j - y_i}{L_{ij}} + T_{ik} \frac{y_k - y_i}{L_{ik}} + T_{il} \frac{y_l - y_i}{L_{il}} + T_{im} \frac{y_m - y_i}{L_{im}} + F_{yi} = 0, \quad (6.2)$$

$$T_{ij} \frac{z_j - z_i}{L_{ij}} + T_{ik} \frac{z_k - z_i}{L_{ik}} + T_{il} \frac{z_l - z_i}{L_{il}} + T_{im} \frac{z_m - z_i}{L_{im}} + F_{zi} = 0, \quad (6.3)$$

kde (x_i, y_i, z_i) je souřadnice uzlu i , a podobně pro j, k, l, m , $\mathbf{F} = (F_{xi}, F_{yi}, F_{zi})$ vektor vnější síly působící na uzel i (v tomto případě uvažujeme nulové horizontální síly, tedy $F_{xi} = 0 = F_{yi}$), L_{ij} je délka spojnice mezi uzly i a j , a T_{ij} velikost vektoru napětí, kterým působí uzel j na uzel i , odvodit rovnovážný stav horizontálních sil (akce a reakce ortogonálních sil) dosazením do rovnic (6.1), (6.2):

$$\begin{aligned} T_{ij} \frac{\Delta l}{L_{ij}} - T_{il} \frac{\Delta l}{L_{il}} &= 0, \\ T_{ik} \frac{\Delta l}{L_{ik}} - T_{im} \frac{\Delta l}{L_{im}} &= 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

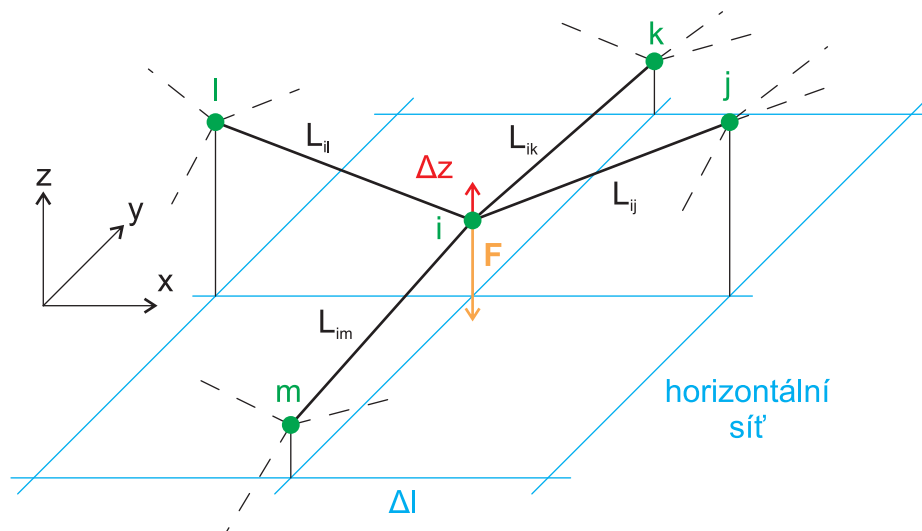
kde Δl je rozteč čtvercové mřížky. Velikosti horizontálních složek vektoru napětí ve směrech os x a y jsou tedy konstantní. Díky tomu:

$$\frac{T_{ij}}{L_{ij}} (z_j - 2z_i + z_l) + \frac{T_{ik}}{L_{ik}} (z_k - 2z_i + z_m) + F_{zi} = 0, \quad (6.5)$$

kde podobnost uzávorkovaných členů s diskretními tvary druhých partiálních derivací není náhodná.

Rovnici (6.5) sestavíme pro každý volný uzel a určíme pevně velikosti horizontálních složek. Získáme soustavu lineárních rovnic pro neznámé z -ové souřadnice volných uzlů.

Příklad 1: Zvolme pevně zborcený čtyřúhelník nad čtvercem s velikostí strany 10m. Protilehlé vrcholy zborceného čtyřúhelníku leží ve výškách 0m a 3m. V tomto případě mají vrcholy zborceného čtyřúhelníku souřadnice $[0, 0, 0]$, $[10, 0, 3]$, $[10, 10, 0]$, $[0, 10, 3]$. Očíslování uzlů je patrné z Obr. 6.2. Uzly na hranici (zborcený čtyřúhelník) mají pevné souřadnice, které se během výpočtu nemění. Pro každý volný uzel sestavíme rovnici (6.5). Připomeňme, že podíly $\frac{T_{ij}}{L_{ij}}$, resp. $\frac{T_{ik}}{L_{ik}}$, jsou konstantní podél celého lana rovnoběžného s rovinou (x, z) , resp. (y, z) . Můžeme tedy zadat 18 různých hodnot. Označme $q_{nx} = \frac{T_{ij}}{L_{ij}}$, resp. $q_{ny} = \frac{T_{ik}}{L_{ik}}$, pro přípustná i, j, k a $n = 1, \dots, 9$.



Obrázek 6.1: Metoda sítě

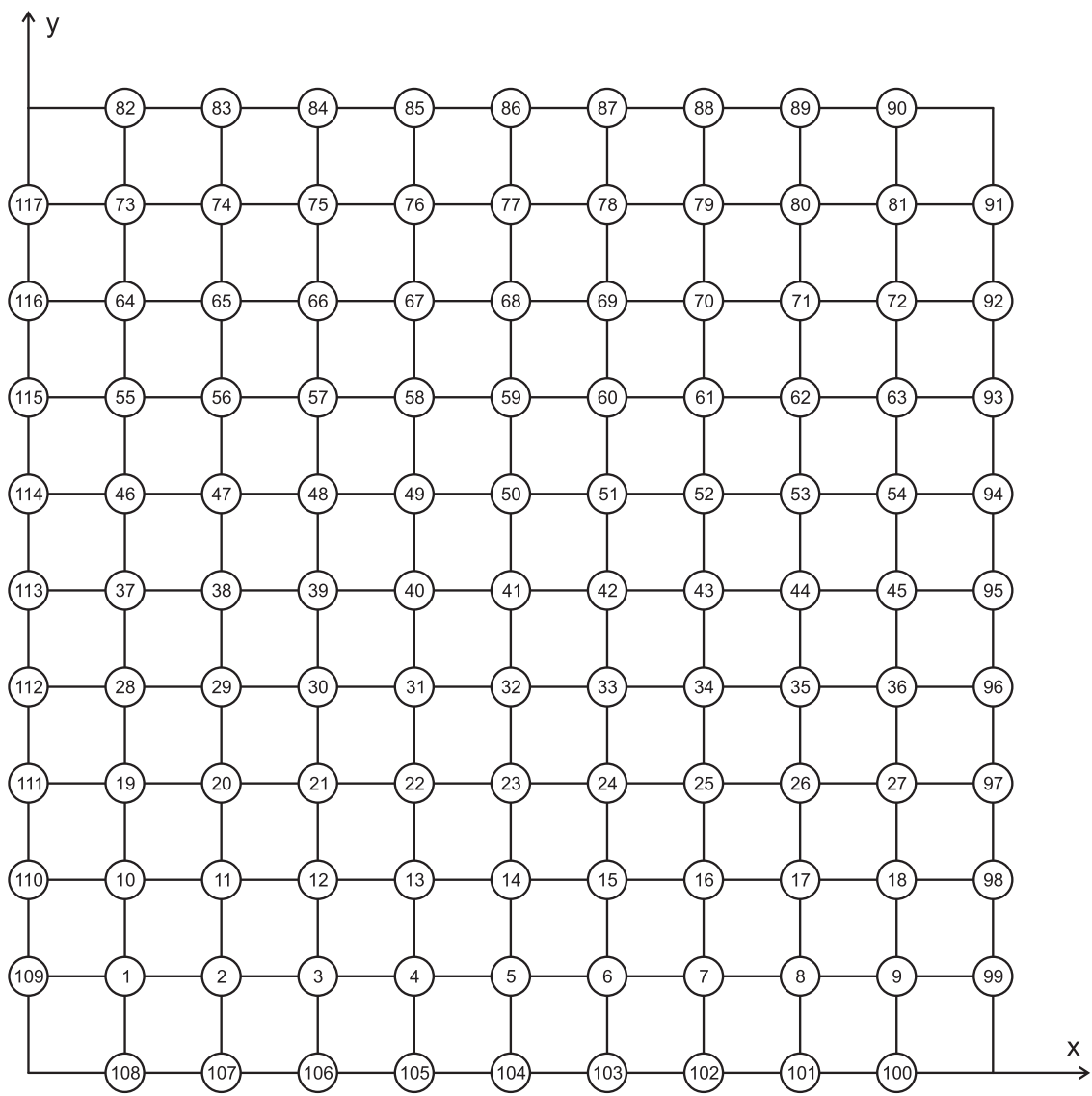
Výsledná plocha na Obr. 6.3 je spočítána v jediném kroku pro zvolené hodnoty: na každý uzel působí ve svislém směru gravitační síla o velikosti $0,5 \text{ N}$ ($F_{zi} = -0,5$); každé spojnici je přiřazen poměr $q_{nx} = q_{ny} = 50 \text{ N m}^{-1}$.

Při zadání $F_{zi} = -0,5$, kde $i = 1, \dots, 81$, $q_{nx} = q_{ny} = 1 \text{ N m}^{-1}$, kde $n = 1, \dots, 9$, je patrná z Obr. 6.4 citlivost této metody na určení vstupních hodnot. Lanová síť je v tomto případě prověšená.

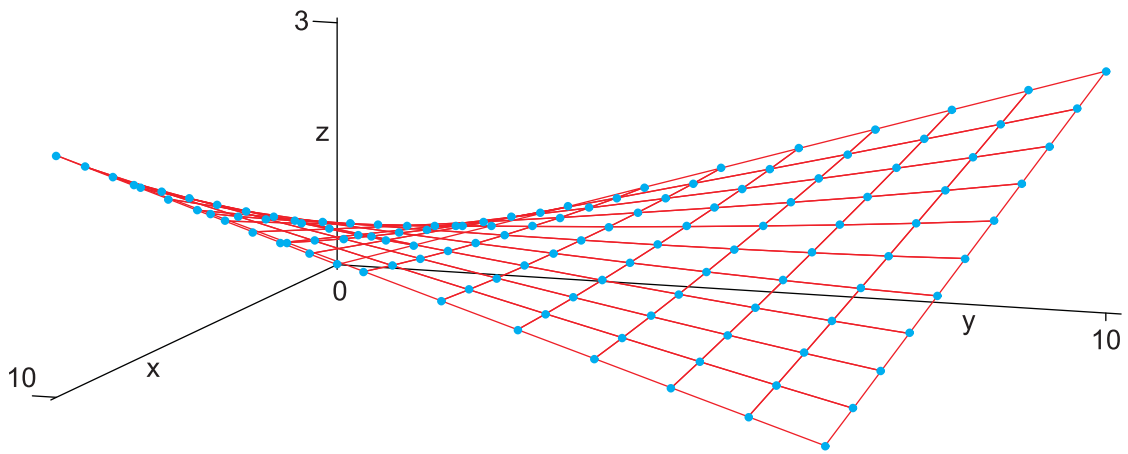
Poslední ukázka na Obr. 6.5 je pro stejné zatížení jako předchozí dva případy s tím rozdílem, že pro každé lano je volen jiný poměr, konkrétně

$$\begin{aligned}
 q_{1x} = q_{9x} = q_{1y} = q_{9y} &= 1 \text{ N m}^{-1}, \\
 q_{2x} = q_{8x} = q_{2y} = q_{8y} &= 2 \text{ N m}^{-1}, \\
 q_{3x} = q_{7x} = q_{3y} = q_{7y} &= 8 \text{ N m}^{-1}, \\
 q_{4x} = q_{6x} = q_{4y} = q_{6y} &= 32 \text{ N m}^{-1}, \\
 q_{5x} = q_{5y} &= 128 \text{ N m}^{-1}.
 \end{aligned}$$

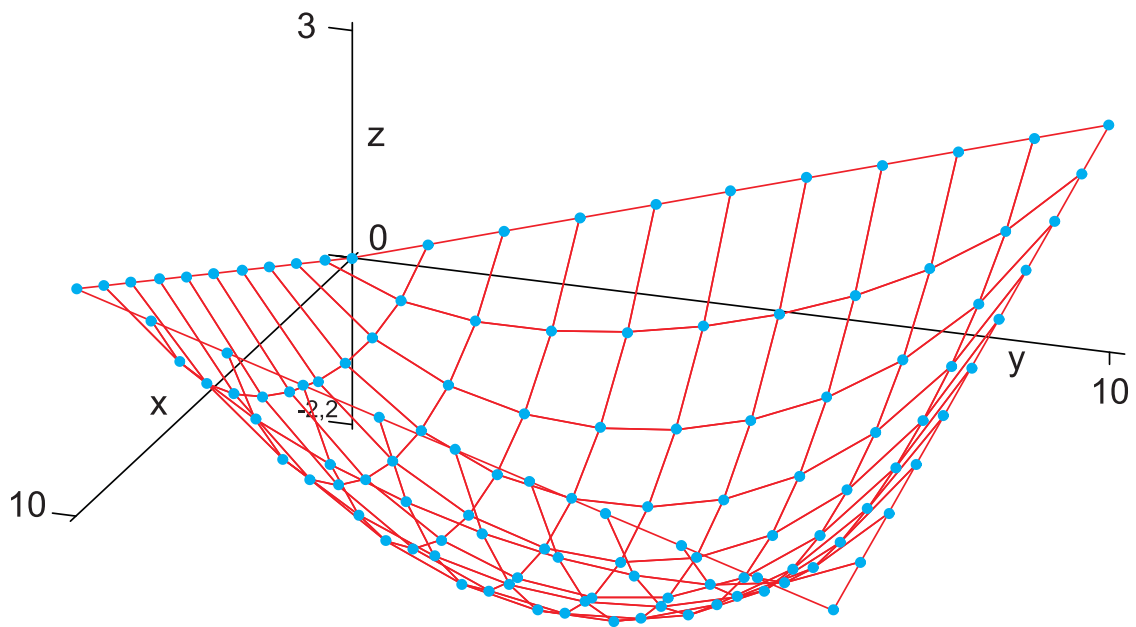
Ze zobrazení lan je patrné jejich „zvlnění“, které je pro membránovou konstrukci nežádoucím jevem. ◁



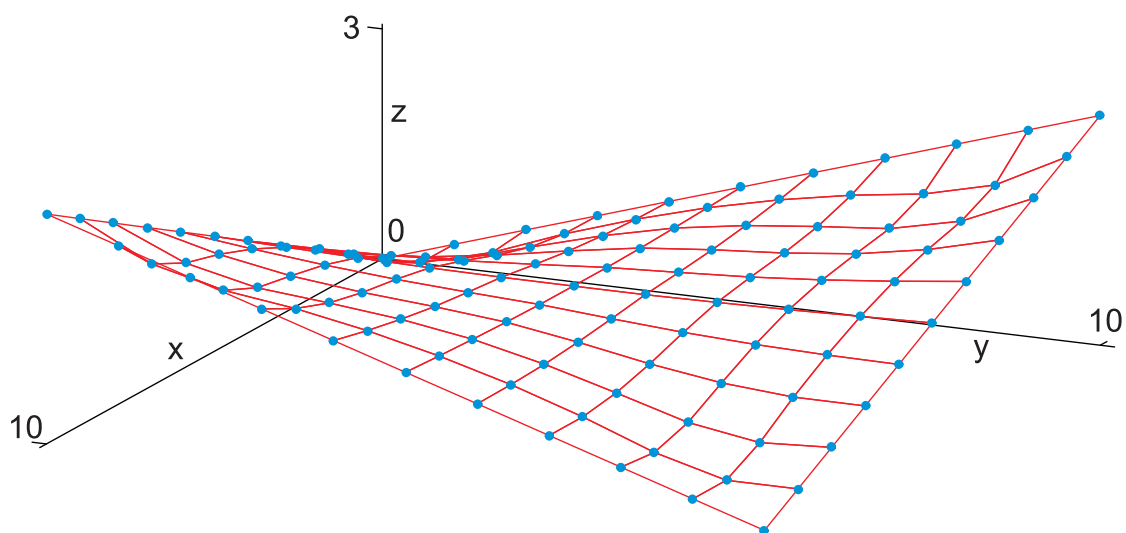
Obrázek 6.2: Očíslování sítě



Obrázek 6.3: Výsledná síť metodou sítě



Obrázek 6.4: Výsledná síť pro nevhodně zvolené vstupní podmínky



Obrázek 6.5: Výsledná síť pro různé podíly

6.2 Metoda hustoty síly ²

Základní myšlenka metody hustoty síly opět spočívá v modelování membránové konstrukce sítí, [20], a lze ji pokládat za jisté zobecnění metody sítě. Prvky sítě jsou uzly a spojnice (lana nebo tyče). Cílem metody je nalézt stav, který by zaujala tato síť při zavěšení v pevném rámu nebo mezi danými pevnými body. Síť se ustálí v rovnovážné poloze a v každém uzlu je tedy výslednice sil nulová. Na rozdíl od metody sítě zde nepředpokládáme, že kolmými průměty je ortogonální síť a výpočet ovlivňuje všechny tři souřadnice uzlů. Výpočet je stejně jako u metody sítě jedнокrokový.

Základní princip demonstrujeme na obdobném příkladu jako u metody sítě - hledáme souřadnice volného uzlu i , který je spojen s uzly j, k, l, m úsečkami. Nelinearita rovnic (6.1)-(6.3) rovnováhy v uzlu i spočívá v závislosti délek $L_{ij}, L_{ik}, L_{il}, L_{im}$ spojnic na souřadnicích uzlů. V metodě sítě je podíl $\frac{T_{ij}}{L_{ij}}$, resp. $\frac{T_{ik}}{L_{ik}}$, konstantní v odpovídajícím směru. Obdobně zde zavedeme novou veličinu - hustotu síly (poměr síly a délky). Rovnice (6.1)-(6.3) rovnováhy pak převedeme do tvaru

$$q_{ij}(x_j - x_i) + q_{ik}(x_k - x_i) + q_{il}(x_l - x_i) + q_{im}(x_m - x_i) + F_{xi} = 0, \quad (6.6)$$

$$q_{ij}(y_j - y_i) + q_{ik}(y_k - y_i) + q_{il}(y_l - y_i) + q_{im}(y_m - y_i) + F_{yi} = 0, \quad (6.7)$$

$$q_{ij}(z_j - z_i) + q_{ik}(z_k - z_i) + q_{il}(z_l - z_i) + q_{im}(z_m - z_i) + F_{zi} = 0, \quad (6.8)$$

kde $q_{ij}, q_{ik}, q_{il}, q_{im}$ jsou hustoty síly.

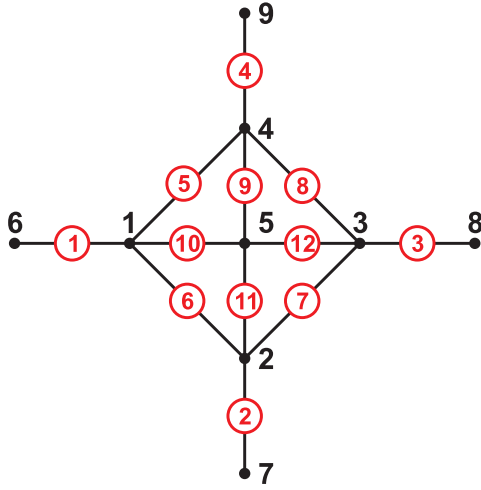
Protože metoda hustoty síly nabízí větší volnost topologie sítě, využijme v tomto oddíle značení použité v [20]. Vektoru (malá tučná písmena) odpovídá diagonální matice (velká tučná písmena), např.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tento zápis zjednoduší sestavení matice soustav.

Příklad seskupení n vrcholů a m spojnic schematicky zachycuje graf Obr. 6.6. Matice $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_v | \mathbf{C}_p)$ odpovídající tomuto grafu je vypsána tabulkou Tab. 6.1. Čísla uzlů jsou v horním řádku Tab. 6.1, čísla spojnic v levém sloupci. Hodnoty 1 a -1 značí začátek a konec spojnice. Volným n_v bodům odpovídá část \mathbf{C}_v matice \mathbf{C} a nacházejí se před druhou svislou čárou. Pevným n_p bodům odpovídá část \mathbf{C}_p matice \mathbf{C} a nacházejí se za druhou svislou čárou. Tečka (odpovídá nulové číselné hodnotě) značí, že vrchol není koncovým bodem odpovídající spojnice. Zřejmě $n = n_v + n_p$. Uzly \mathbf{P}_i mají souřadnice (x_{vi}, y_{vi}, z_{vi}) , $i = 1, \dots, n_v$, resp. (x_{pi}, y_{pi}, z_{pi}) , $i = 1, \dots, n_p$, podle toho zda jsou volné, resp. pevné. Souřadnice vytvoří vektory $\mathbf{x}_v, \mathbf{y}_v, \mathbf{z}_v$ dimenze n_v , resp. vektory $\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p, \mathbf{z}_p$ dimenze n_p .

²Force Density Method.



Obrázek 6.6: Graf uzlů a spojnic

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	-1	.	.	.
2	.	1	-1	.	.
3	.	.	1	-1	.
4	.	.	.	1	-1
5	1	.	.	-1
6	1	-1
7	.	1	-1
8	.	.	1	-1
9	.	.	.	1	-1
10	1	.	.	.	-1
11	.	1	.	.	-1
12	.	.	1	.	-1
	\mathbf{C}_v					\mathbf{C}_p			

Tabulka 6.1: Matice uzlů a spojnic

Délky l_i , $i = 1, \dots, m$, spojnic určují vektor \mathbf{l} a vnitřní síly t_i , $i = 1, \dots, m$, ve směru spojnice i vektor \mathbf{t} . V i -tém uzlu jsou složky zatížení f_{xi} , f_{yi} , f_{zi} ve směru os x , y , z a tvoří vektory \mathbf{f}_x , \mathbf{f}_y , \mathbf{f}_z .

Složky vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} představují rozdíly x -ových, y -ových a z -ových souřadnic krajních uzlů jednotlivých spojnic:

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_v \mathbf{x}_v + \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p,$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}_v \mathbf{y}_v + \mathbf{C}_p \mathbf{y}_p,$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}_v \mathbf{z}_v + \mathbf{C}_p \mathbf{z}_p.$$

Vyjádřením Jakobiho matic vektorové funkce \mathbf{l} , kde $l_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}$,

$$\left(\frac{\partial l_i}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{c_{ji} u_i}{l_i} \right) = \mathbf{C}_v^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1}, \quad \left(\frac{\partial l_i}{\partial y_j} \right) = \mathbf{C}_v^T \mathbf{V} \mathbf{L}^{-1}, \quad \left(\frac{\partial l_i}{\partial z_j} \right) = \mathbf{C}_v^T \mathbf{W} \mathbf{L}^{-1},$$

upravíme rovnice rovnováhy do tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_v^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{t} &= \mathbf{f}_x, \\ \mathbf{C}_v^T \mathbf{V} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{t} &= \mathbf{f}_y, \\ \mathbf{C}_v^T \mathbf{W} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{t} &= \mathbf{f}_z. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Položíme-li v rovnicích (6.9)

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{t},$$

získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_v^T \mathbf{U} \mathbf{q} &= \mathbf{f}_x, \\ \mathbf{C}_v^T \mathbf{V} \mathbf{q} &= \mathbf{f}_y, \\ \mathbf{C}_v^T \mathbf{W} \mathbf{q} &= \mathbf{f}_z. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Složky q_i , $i = 1, \dots, m$, vektoru \mathbf{q} jsou poměry mezi silou a délkou spojnice, tedy hustoty síly. Srovnajme s (6.6)-(6.8).

Využijeme-li faktu, že \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{W} , \mathbf{Q} jsou diagonální matice, rovnosti

$$\mathbf{U} \mathbf{q} = \mathbf{Q} \mathbf{u}, \quad \mathbf{V} \mathbf{q} = \mathbf{Q} \mathbf{v}, \quad \mathbf{W} \mathbf{q} = \mathbf{Q} \mathbf{w},$$

převědou (6.10) na tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_v^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_v \mathbf{x}_v + \mathbf{C}_v^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p &= \mathbf{f}_x, \\ \mathbf{C}_v^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_v \mathbf{y}_v + \mathbf{C}_v^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_p \mathbf{y}_p &= \mathbf{f}_y, \\ \mathbf{C}_v^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_v \mathbf{z}_v + \mathbf{C}_v^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_p \mathbf{z}_p &= \mathbf{f}_z. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Označíme-li $\mathbf{D}_v = \mathbf{C}_v^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_v$ a $\mathbf{D}_p = \mathbf{C}_v^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_p$, rovnice (6.11) se transformují na

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_v \mathbf{x}_v &= \mathbf{f}_x - \mathbf{D}_p \mathbf{x}_p, \\ \mathbf{D}_v \mathbf{y}_v &= \mathbf{f}_y - \mathbf{D}_p \mathbf{y}_p, \\ \mathbf{D}_v \mathbf{z}_v &= \mathbf{f}_z - \mathbf{D}_p \mathbf{z}_p. \end{aligned} \quad (6.12)$$

(6.12) jsou tři soustavy lineárních rovnic pro x -ové, y -ové a z -ové souřadnice. Každá soustava má n_v řádků a n_v neznámých. Pokud uvažujeme předepjatou síť ($q_i > 0$), pak je matice \mathbf{D}_v pozitivně definitní. S předepsaným zatížením, souřadnicemi pevných bodů a danou hustotou sil v jediném kroku vypočteme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_v &= \mathbf{D}_v^{-1} (\mathbf{f}_x - \mathbf{D}_p \mathbf{x}_p), \\ \mathbf{y}_v &= \mathbf{D}_v^{-1} (\mathbf{f}_y - \mathbf{D}_p \mathbf{y}_p), \\ \mathbf{z}_v &= \mathbf{D}_v^{-1} (\mathbf{f}_z - \mathbf{D}_p \mathbf{z}_p). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Tento rovnovážný stav je považován za předběžné přiblížení tvaru membrány, protože v praxi je tvar ještě ovlivněn dalšími podmínkami vedoucími na řešení nelineárního problému. Nevýhodou této metody je, že ne vždy předem známe konečnou délku lan, která vystupuje ve výpočtu. S touto metodou se kombinuje i metoda hustoty plošného napětí³.

³Surface Stress Density Method.

Zmíněnou metodu včetně nelineárních modifikací využívá např. profesionální software *ForTen 3000*[®] společnosti *TSI* pro hledání tvaru membrány.

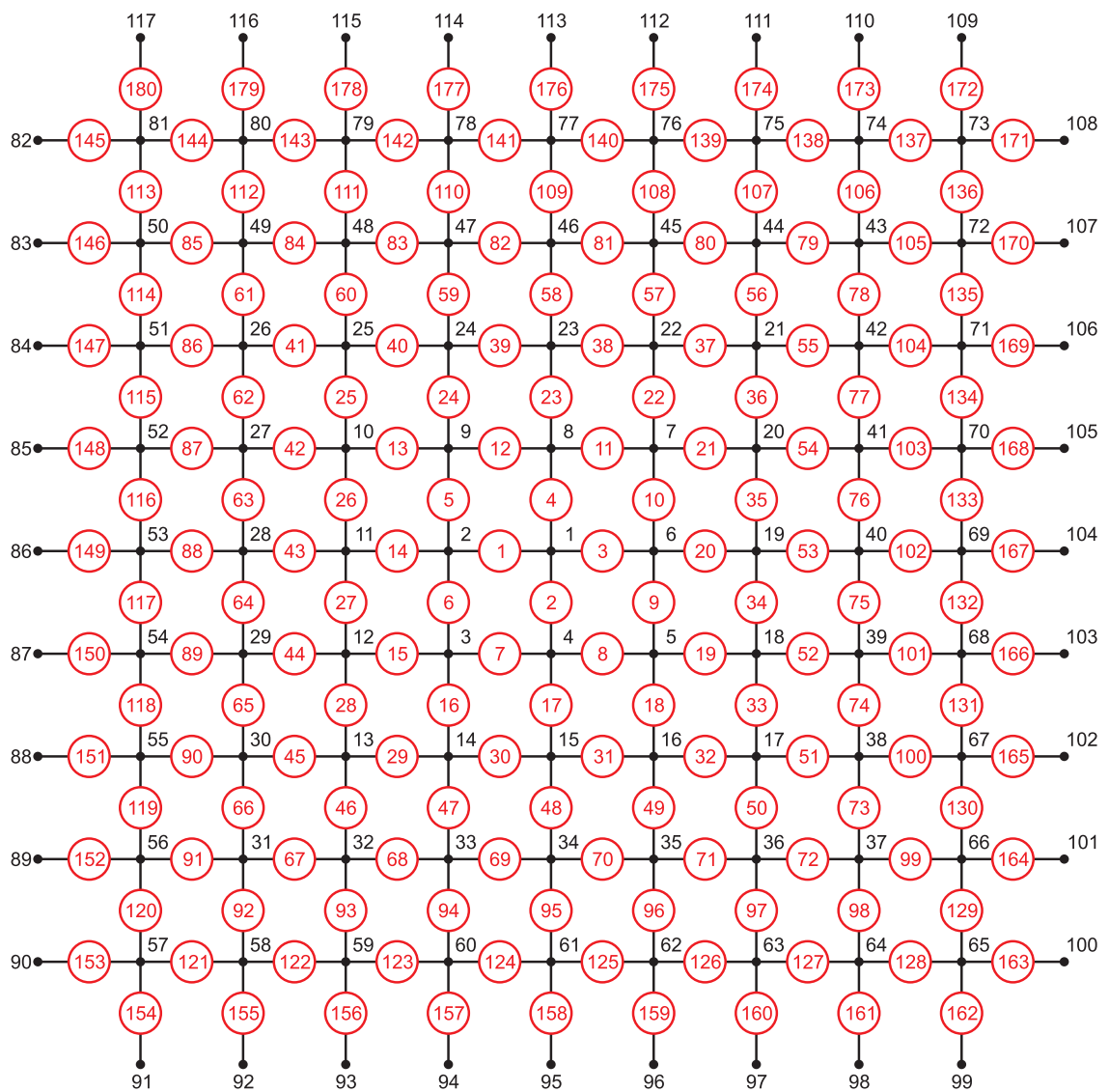
Příklad 2: Zvolme zborcený čtyřúhelník nad čtvercem s velikostí strany 10m. Protilehlé vrcholy zborceného čtyřúhelníku leží ve výškách 0m a 3m. Očíslování uzlů a spojnic je patrné z Obr. 6.7. Vzhledem k velikosti matice \mathbf{C} uzlů a spojnic ji zde nebudeme uvádět. Její sestavení je patrné z jednoduchého obrázku Obr. 6.6 a tabulky Tab. 6.1. Zde $m = 180$, $n_v = 81$ a $n_p = 36$. Časová nevýhoda u této metody nespočívá ve výpočtu samotném (matice \mathbf{C} je řídká), ale v zadávání vstupních hodnot do matice \mathbf{C} , které je velmi pracné. Výsledná plocha na Obr. 6.8 je spočítána v jediném kroku pro zvolené hodnoty: na každý uzel působí ve svislém směru gravitační síla o velikosti 0,5 N ($f_{zi} = -0,5$); každé spojnici je přiřazena hustota 50 N m⁻¹.

Při zadání $f_{zi} = -0,5$, kde $i = 1, \dots, 81$, $q_i = 1$ N m⁻¹, kde $i = 1, \dots, 180$, je patrná z Obr. 6.9 citlivost této metody na určení vstupních hodnot. Lanová síť je v tomto případě prověšená.

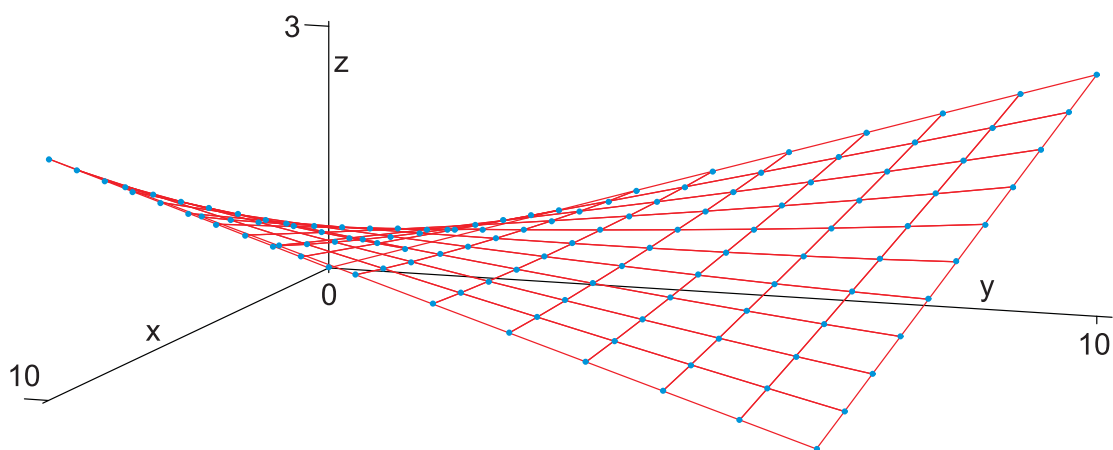
Zatím se může zdát, že metoda sítě je pouze speciálním případem metody hustoty síly. Metoda hustoty síly ale dává mnohem větší volnost při zadávání hodnot. Ze zborceného čtyřúhelníku zafixujeme pouze jeho vrcholy (tedy konkrétně body [0, 0, 0], [10, 0, 3], [10, 10, 0], [0, 10, 3]). Spojnice očísloujeme jako na Obr. 6.10. Spojnicím přiřadíme hustoty:

$$\begin{aligned} q_i &= 200 \text{ N m}^{-1}, & \text{pro } i &= 181, \dots, 220 \\ q_i &= 100 \text{ N m}^{-1}, & \text{pro } i &= 145, \dots, 180 \\ q_i &= 50 \text{ N m}^{-1}, & \text{pro } i &= 1, \dots, 144. \end{aligned}$$

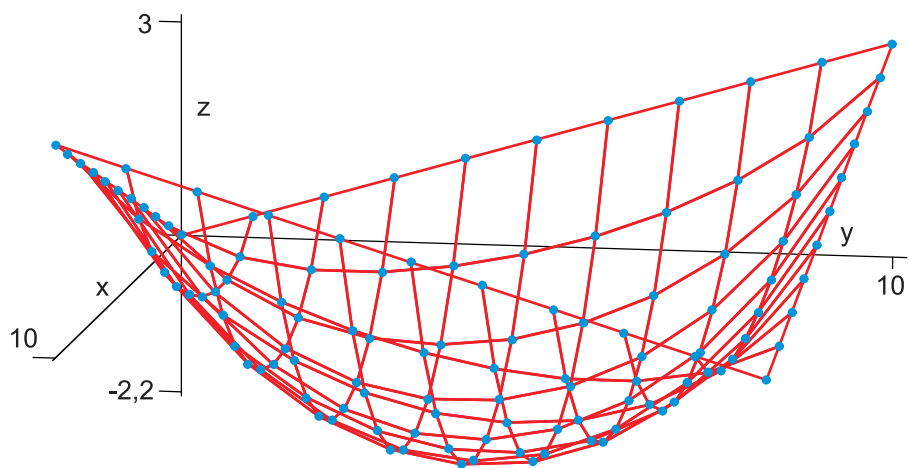
Výsledná plocha je na Obr. 6.11. Na rozdíl od metody sítě zde můžeme zadat podíly síly ku délce u každé spojnici zvlášť. ◁



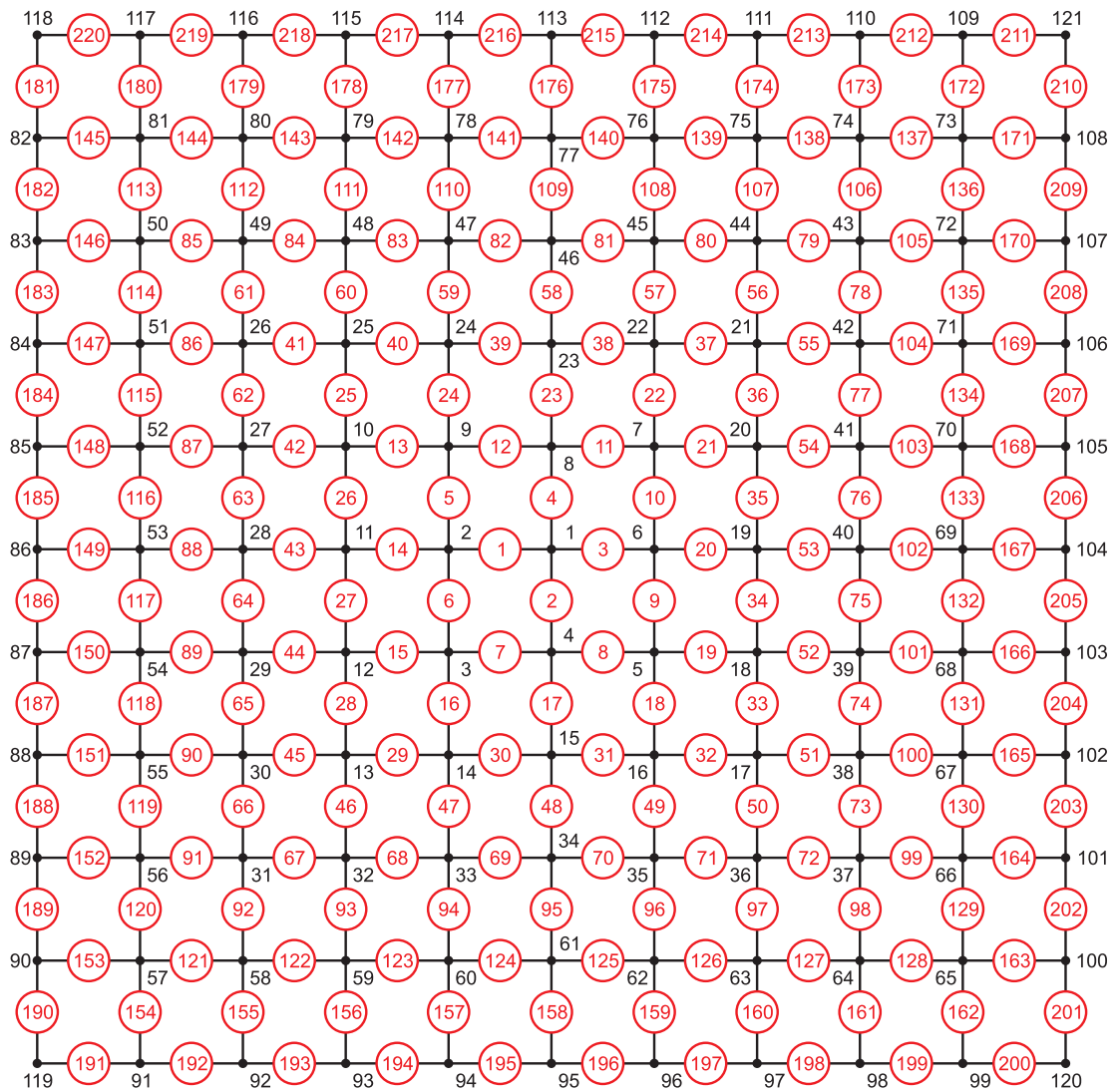
Obrázek 6.7: Očíslování sítě



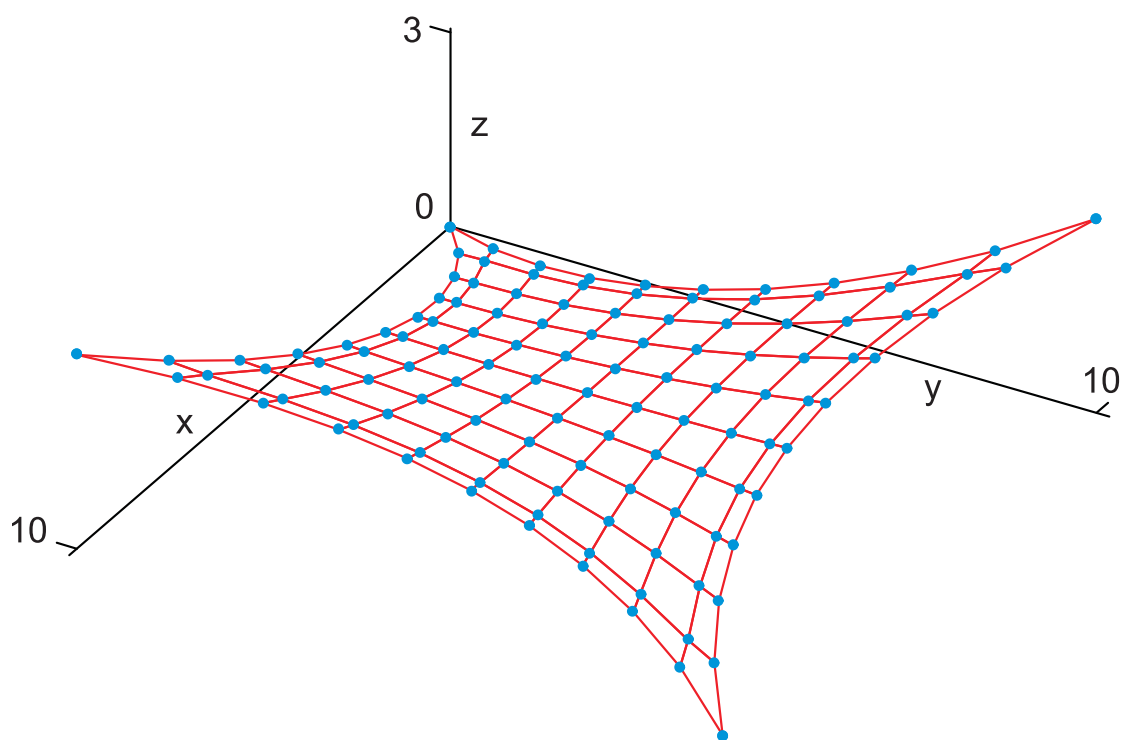
Obrázek 6.8: Výsledná síť metodou hustoty síly



Obrázek 6.9: Výsledná síť pro nevhodně zvolené vstupní podmínky



Obrázek 6.10: Očíslování sítě - fixované čtyři body

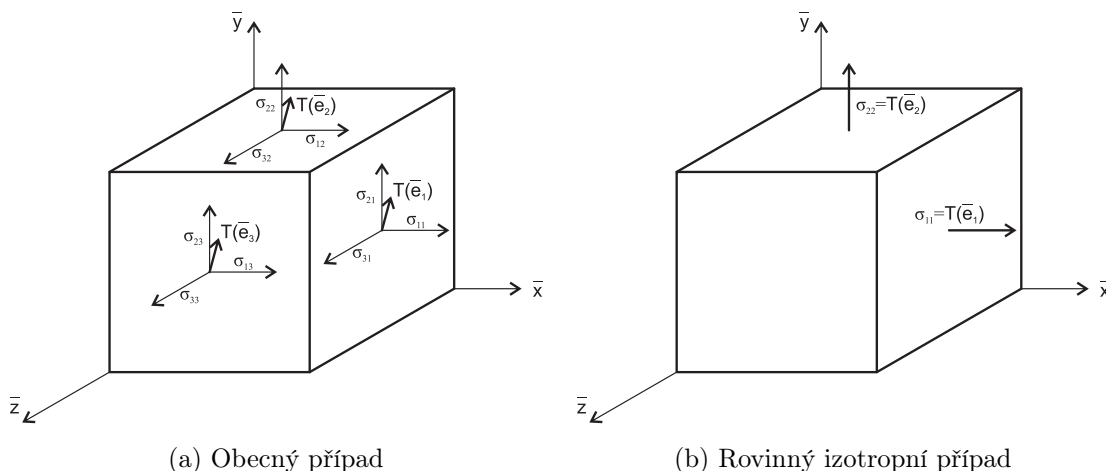


Obrázek 6.11: Výsledná síť metodou hustoty síly - fixované čtyři body

6.3 Metoda hustoty plošného napětí

Tato metoda modeluje membránovou konstrukci trojúhelníkovou sítí a zanedbává smyková (tečná) napětí, [13]. Na rozdíl od metody sítě a metody hustoty síly metoda hustoty plošného napětí poskytuje inženýrům informace o rozdělení napětí v membráně a ne pouze v lanech. Pro tuto metodu je volen materiál membrány *izotropní* - ve všech směrech má stejné vlastnosti. Složky tenzoru *izotropního* Cauchyho napětí vzhledem k lokálním $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ kartézským souřadnicím jsou σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Protože se jedná o dvojrozměrný případ (lokální souřadný systém je umístěn do roviny trojúhelníku) je $\sigma_{3j} = 0$. Pro tenzor izotropního tahového napětí je charakteristické položit $\sigma_{12} = 0$ (smykové napětí) a $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_0 > 0$ (normálová napětí). Pro každý prvek trojúhelníkové sítě se počet složek tenzoru napětí, Obr. 6.12 sníží následovně:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\sigma_0).$$

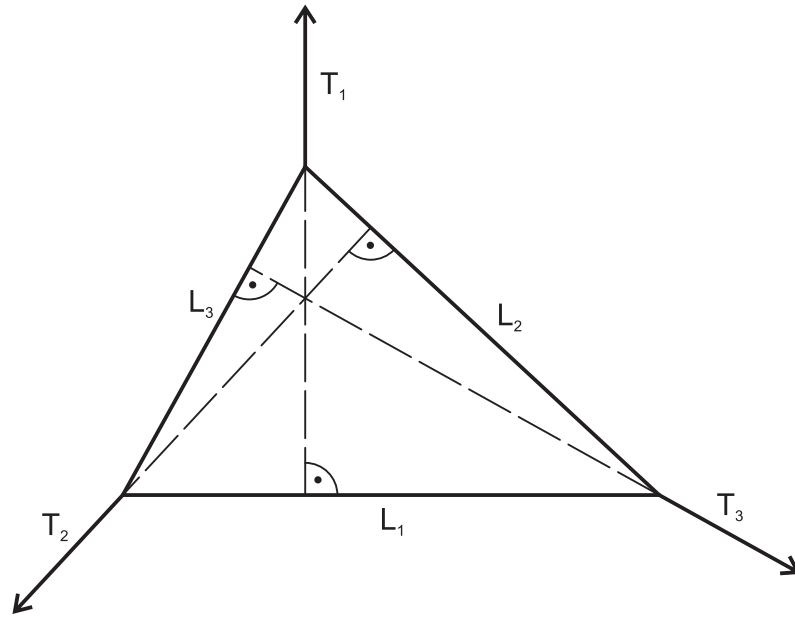


Obrázek 6.12: Složky tenzoru napětí

Pak

$$T_i = L_i H \sigma_0,$$

kde H je tloušťka membrány, T_i jsou velikosti tří sil umístěných ve vrcholech trojúhelníku a kolmých k protější straně délky L_i , Obr. 6.13. Velikost vektoru se shodnou transformací soustavy souřadné nemění. Určíme tedy jednotkový směr vektoru síly vzhledem ke globální soustavě souřadné a vynásobíme ho touto velikostí. Dále zna-



Obrázek 6.13: Síly ve vrcholech trojúhelníkového prvku

číme souřadnice bodů s pruhem v lokální soustavě souřadné a bez pruhu v globální soustavě souřadné. Pro trojúhelník ABC , Obr. 6.14, vyjádříme vektor napětí \mathbf{T}_C , kterou působí trojúhelníková membrána ABC na bod C , jako:

$$\mathbf{T}_C = T_C \boldsymbol{\nu} = LH \sigma_0 \boldsymbol{\nu},$$

kde $\boldsymbol{\nu}$ je jednotková normála protilehlé strany o délce L . Souřadnice bodu P jsou dány:

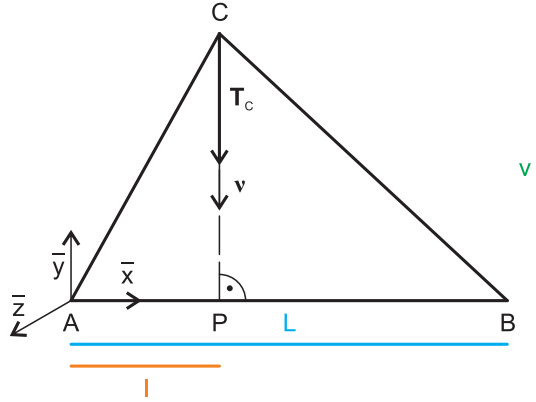
$$x_P = x_A + \frac{l}{L} (x_B - x_A), \quad y_P = y_A + \frac{l}{L} (y_B - y_A), \quad z_P = z_A + \frac{l}{L} (z_B - z_A),$$

kde $L = \|\overrightarrow{AB}\|$, $l = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{L}$. Protože v je vzdálenost mezi body C a P , $v = \sqrt{\|\overrightarrow{AC}\|^2 - l^2}$, píšeme jednotkový vektor normály ve tvaru:

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{v} \overrightarrow{CP} \quad \mathbf{T}_C = \frac{1}{v} LH \sigma_0 \overrightarrow{CP}.$$

Pokud označíme $S = \frac{vL}{2}$, můžeme psát předchozí rovnici ve tvaru:

$$\boldsymbol{\nu} = \left(\frac{\sigma_0}{S} \right) L^2 \left(\frac{H}{2} \right) \overrightarrow{CP},$$



Obrázek 6.14: Vnitřní síla v bodě C

kde je možné konstantní faktor $H/2$ zahrnout do σ_0 . Poměr $Q_S = \frac{\sigma_0}{S}$ mezi koeficientem izotropního napětí σ_0 a plošným obsahem trojúhelníka je koeficient hustoty plošného napětí.

Pro n trojúhelníků, které mají společný vrchol C je celková vnitřní síla \mathbf{F}_C vyjádřena v globálních souřadnicích

$$\mathbf{F}_C = \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_{Ci} = \sum_{i=1}^n Q_{Si} L_i^2 \overrightarrow{CP}_i,$$

kde $Q_{Si} = \frac{\sigma_{0i}}{S_i}$. Značení je zřejmé z Obr. 6.15. Položíme-li

$$N_x = \sum_{i=1}^n Q_{Si} L_i^2 x_{Pi}, \quad N_y = \sum_{i=1}^n Q_{Si} L_i^2 y_{Pi}, \quad N_z = \sum_{i=1}^n Q_{Si} L_i^2 z_{Pi}, \quad (6.14)$$

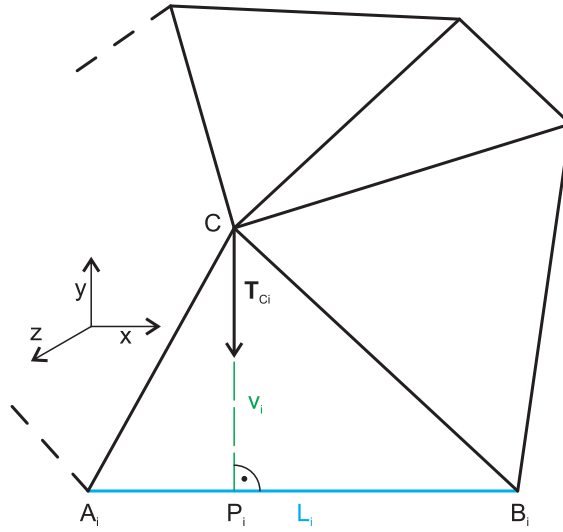
$$D = \sum_{i=1}^n Q_{Si} L_i^2,$$

získáme vyjádření složek \mathbf{F}_C

$$F_{Cx} = N_x - Dx_C, \quad F_{Cy} = N_y - Dy_C, \quad F_{Cz} = N_z - Dz_C, \quad (6.15)$$

kde x_C, y_C, z_C jsou globální souřadnice bodu C . Rovnovážný stav membrány je dosažen iterací. Pokud je v bodě C dosaženo statické rovnováhy, pak $\mathbf{F}_C = 0$ pro libovolný bod C . To je zaručeno, pokud

$$x_C = \frac{N_x}{D}, \quad y_C = \frac{N_y}{D}, \quad z_C = \frac{N_z}{D}.$$



Obrázek 6.15: Celkové vnitřní síly v bodě C

Spočteme nové globální souřadnice bodu C . S těmi se změní polohy bodů P_i . Spočteme nové hodnoty (6.14). Ty dosadíme zpět do (6.15). Délky L_i a plošné hustoty napětí Q_{Si} se nemění. A iterační postup se zopakuje. Pro $(k + 1)$. iteraci je

$$x_{C,k+1} = \frac{N_{x,k}}{D} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_{Si} L_i^2 x_{Hi,k}}{\sum_{i=1}^n Q_{Si} L_i^2}, \quad (6.16)$$

kde

$$x_{P_i,k} = x_{A_i} + \frac{l_{i,k}}{L_i} (x_{B_i} - x_{A_i}) = x_{A_i} + \left(\left| \overrightarrow{A_i B_i} \cdot \overrightarrow{A_i C_i} \right| \frac{x_{B_i} - x_{A_i}}{L_i^2} \right).$$

Označením

$$q_i = \frac{Q_{Si}}{\sum_{j=1}^n Q_{Sj} L_i^2}$$

vyjádříme rovnici (6.16)

$$x_{C,k+1} = a_{xx} x_{C,k} + a_{xy} y_{C,k} + a_{xz} z_{C,k} + b_x,$$

kde

$$b_x = \sum_{i=1}^n q_i [(y_{A_i} - y_{B_i}) (x_{B_i} y_{A_i} - x_{A_i} y_{B_i}) + (z_{A_i} - z_{B_i}) (x_{B_i} z_{A_i} - x_{A_i} z_{B_i})],$$

$$a_{xx} = \sum_{i=1}^n q_i (x_{B_i} - x_{A_i})^2,$$

$$a_{xy} = \sum_{i=1}^n q_i (x_{Bi} - x_{Ai}) (y_{Bi} - y_{Ai}),$$

$$a_{xz} = \sum_{i=1}^n q_i (x_{Bi} - x_{Ai}) (z_{Bi} - z_{Ai}),$$

a obdobně

$$y_{C,k+1} = a_{yx}x_{C,k} + a_{yy}y_{C,k} + a_{yz}z_{C,k} + b_y,$$

$$z_{C,k+1} = a_{zx}x_{C,k} + a_{zy}y_{C,k} + a_{zz}z_{C,k} + b_z.$$

V maticovém zápisu můžeme zjednodušeně napsat:

$$\begin{pmatrix} x_{C,k+1} \\ y_{C,k+1} \\ z_{C,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{C,k} \\ y_{C,k} \\ z_{C,k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix},$$

což je ekvivalentní se zápisem

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{c}_k + \mathbf{b},$$

kde \mathbf{A} je symetrická matice 3×3 , \mathbf{A} i \mathbf{b} jsou závislé na poloze bodu C , vrcholech A_i , B_i a koeficientu Q_{Si} .

Pokud vektor \mathbf{c}_0 odpovídá počáteční poloze bodu C , pak

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{c}_0 + \left(\sum_{i=0}^k \mathbf{A}^i \right) \mathbf{b}, \quad (6.17)$$

kde

$$\text{pro } k=0 \quad \mathbf{A}^k = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}_k = \mathbf{A}^k [(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{c}_0 + \mathbf{b}].$$

V dodatku článku [13] je ukázáno, že pro $k \rightarrow \infty$ člen $\mathbf{A}^k \rightarrow \mathbf{0}$. Tedy rozdíl $\mathbf{c}_{k+1} - \mathbf{c}_k \rightarrow \mathbf{0}$ a \mathbf{c}_k konverguje k souřadnicím rovnovážné polohy bodu C . Navíc z (6.17) máme

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{c}_0 + (\mathbf{E} - \mathbf{A}^{k+1})(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b},$$

a dále

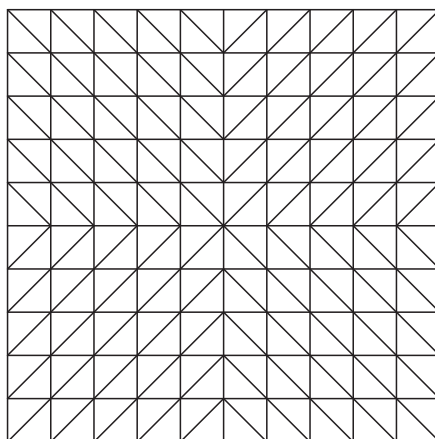
$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{A}^{k+1}[\mathbf{c}_0 - (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}] + (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b},$$

tedy

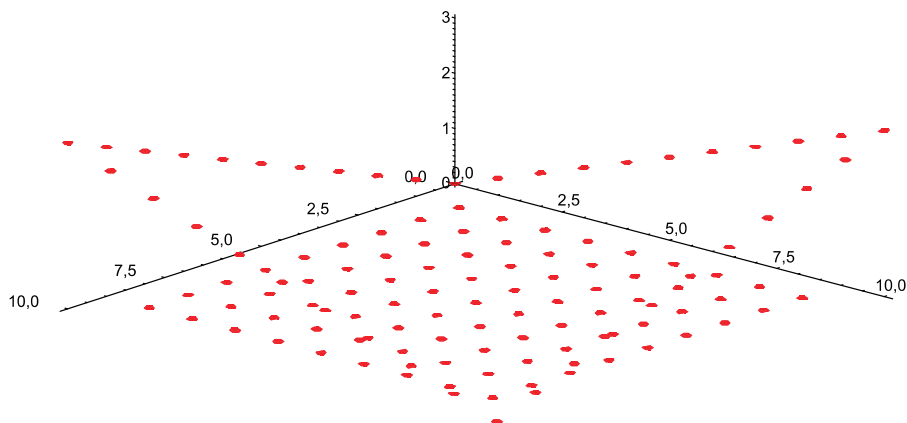
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{c}_{k+1} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}.$$

Příklad 3: Zvolme opět zborcený čtyřúhelník nad čtvercem s velikostí strany 10m. Protilehlé vrcholy zborceného čtyřúhelníku leží ve výškách 0m a 3m. Zvolíme symetrickou mřížku, tj. body $(i, j, 0)$, kde $i, j \in \{2, \dots, 9\}$. Triangulace je schematicky na Obr. 6.16. Protože je průběh výpočtu této metody komplikovanější, je jeho proces shrnut vývojovým diagramem na Obr. 6.21. Počáteční data jsou graficky znázorněna na Obr. 6.17 a konečný stav je na Obr. 6.18. Pro srovnání uveďme ještě případ, kdy jsou počáteční data vnitřních bodů mřížky volena $(i, j, 3/2)$, Obr. 6.19 a Obr. 6.20. V prvním případě je počet iterací 52 a ve druhém 14 (za stejných podmínek iterace).

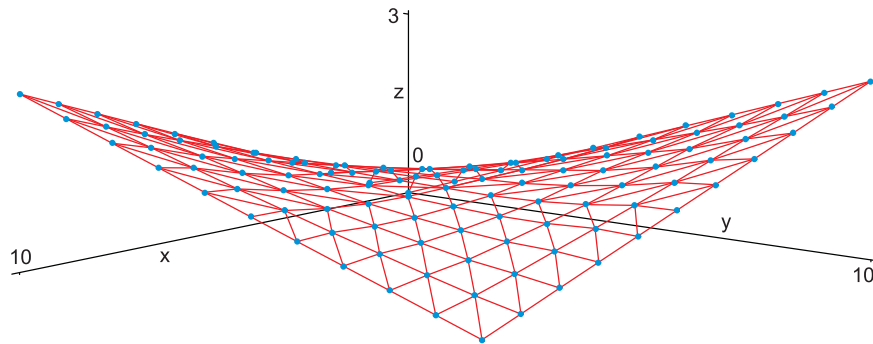
◁



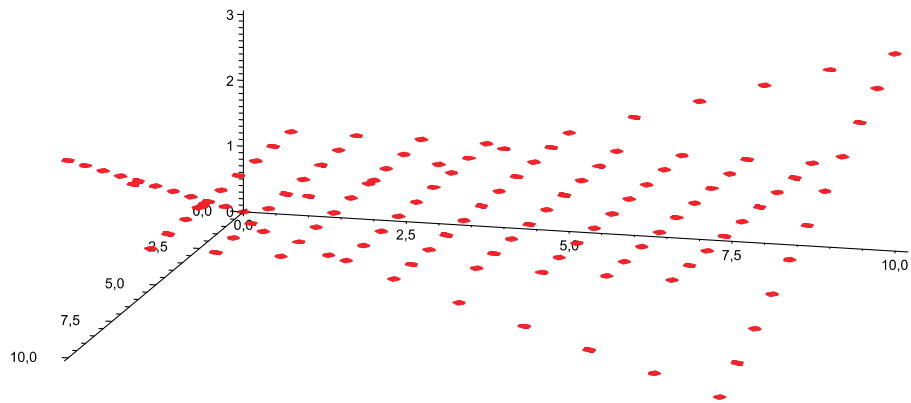
Obrázek 6.16: Trojúhelníková síť



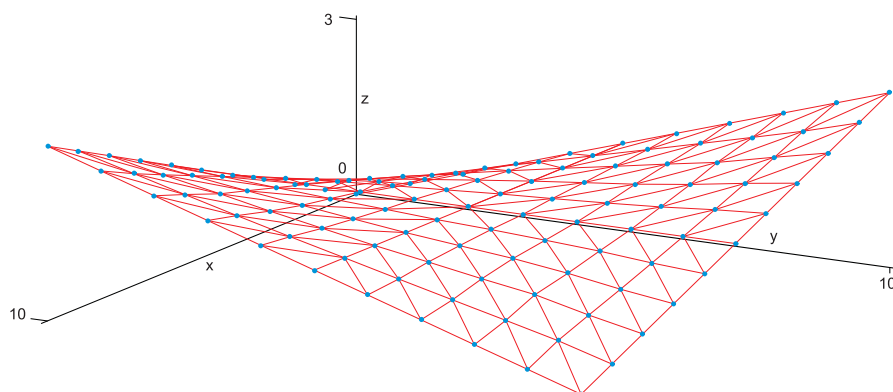
Obrázek 6.17: Počáteční stav



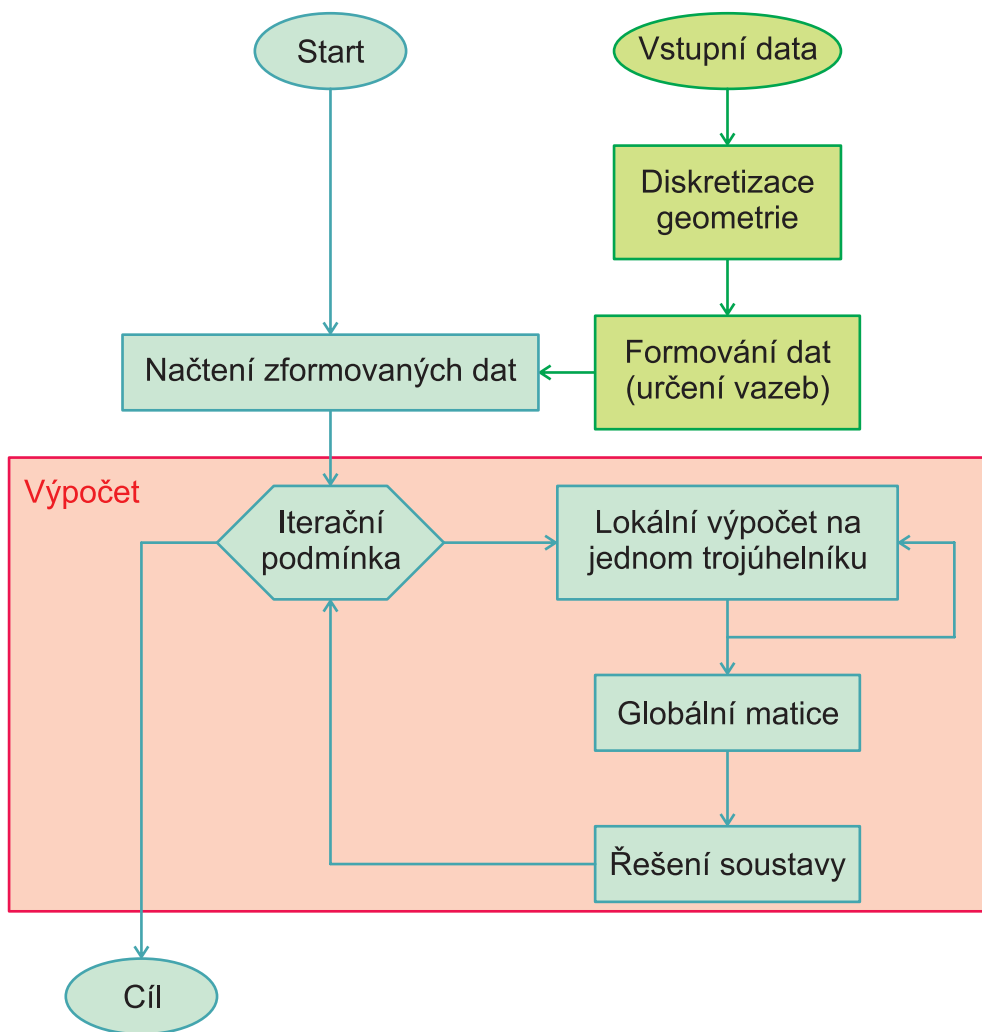
Obrázek 6.18: Konečný stav



Obrázek 6.19: Počáteční stav



Obrázek 6.20: Konečný stav



Obrázek 6.21: Programovací schéma metody hustoty plošného napětí

6.4 Metoda aktualizovaných referenčních konfigurací ⁴

Tento oddíl shrnuje algoritmus zásadní numerické metody vycházející z mechaniky kontinua pro nalezení předepjatého stavu membrány publikovaný v [28]. Tento algoritmus doplněný o kabelové prvky a pevné podpěry (žebra) membránové konstrukce je součástí zásuvného modulu *RhinoMembrane*[®] softwaru *Rhinoceros*[®] společnosti *McNeel*.

Základní rovnice, o kterou se tato metoda opírá, je rovnice virtuální práce vyjádřená vzhledem k počáteční konfiguraci pomocí gradientu deformace. Pokud je membrána v rovnovážném stavu, pak platí rovnice (3.26), kterou zde připomeneme:

$$0 = \delta w = H \int_{\omega} \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \cdot \delta \mathbf{g}_j \sqrt{\det(g_{kl})} d\theta_1 d\theta_2,$$

kde H je tloušťka membrány a σ^{ij} jsou složky tenzoru napětí v aktuální konfiguraci vzhledem ke křivočaré bázi. Odvození této variační úlohy v mechanice kontinua je patrné z oddílu 3.3 a proto se jím zde blíže nezabýváme. Okrajové podmínky této úlohy bývají zadány jako Dirichletovy na celé hranici (pevně zadaný okraj konstrukce) nebo pouze na její části nebo jen v izolovaných bodech. Na zbylé části jsou pak zadány další elastické podmínky.

Rovnice (3.26) je řešena numericky pomocí lineárních/bilineárních konečných prvků. Geometrie plochy a posuvy jsou aproximovány pomocí standardních lineárních/bilineárních konečných prvků.

Příklad 4: Pro každý prvek zavedeme lokální soustavu souřadnou, ve které jsou lokální bázové funkce. Např. pro čtyřúhelníkový prvek to jsou funkce:

$$\begin{aligned} N_1(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{4}(1 + \theta_1)(1 + \theta_2) & N_2(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{4}(1 - \theta_1)(1 + \theta_2) \\ N_3(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{4}(1 - \theta_1)(1 - \theta_2) & N_4(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{4}(1 + \theta_1)(1 - \theta_2) \end{aligned} .$$

Lokální souřadnice uzlů aproximujících počáteční konfiguraci tohoto prvku označme $\tilde{\mathbf{X}}_i$ a jejich posuvy $\tilde{\mathbf{u}}_i$, kde $i = 1, \dots, 4$. Jeden takový prvek v počáteční konfiguraci vyjádříme:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{X}}_i N_i$$

⁴Updated Reference Strategy Method

a jeho posuv

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{u}}_i N_i,$$

V zápisu nerozlišujeme mezi skutečnou a aproximovanou funkcí. Neznámé souřadnice $\tilde{\mathbf{u}}_i$ seřadíme do sloupcového vektoru, který označíme \mathbf{b} , s *ndf* složkami. Variace tečného vektoru je vyjádřena vzhledem k těmto neznámým:

$$\delta \mathbf{g}_1 = \delta b_r \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial b_r} = \delta b_r \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_i}{\partial b_r} \frac{\partial N_i}{\partial \theta_1} \quad \text{a} \quad \delta \mathbf{g}_2 = \delta b_r \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial b_r} = \delta b_r \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_i}{\partial b_r} \frac{\partial N_i}{\partial \theta_2}.$$

Jak uvidíme později není nutné počítat parciální derivaci vektoru \mathbf{g}_3 vzhledem k b_r .

◁

Diskretizovaná rovnice (3.26) je splněna pro libovolné $\delta \mathbf{b}$. Tím získáme nelineární soustavu *ndf* rovnic:

$$\frac{\delta w}{\delta b_r} = H \int_{\omega} \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial b_r} \sqrt{\det(g_{kl})} d\theta_1 d\theta_2 = 0, \quad r = 1, \dots, ndf, \quad (6.18)$$

k jejímuž řešení použijeme *Newtonovu-Raphsonovu metodu*. Linearizace (6.18) vede na soustavu lineárních rovnic

$$\text{LIN} \left(\frac{\delta w}{\delta b_r} \right) = R_r + K_{rs} \delta b_s = 0, \quad \text{kde } r, s = 1, \dots, ndf.$$

Souřadnice diskretizovaného a linearizovaného vektoru zatížení jsou

$$R_r = H \int_{\omega} \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial b_r} \sqrt{\det(g_{kl})} d\theta_1 d\theta_2, \quad (6.19)$$

kde σ^{ij} jsou složky Cauchyho tenzoru napětí, který zde sice představuje konstantní pole napětí, ale jsou vyjádřené vzhledem ke kovariantní bázi a jsou tedy závislé na parametrizaci. Pro izotropní pole napětí tedy

$$R_r = H \bar{\sigma} \int_{\omega} \left[(g_{22} \mathbf{g}_1 - g_{12} \mathbf{g}_2) \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial b_r} + (g_{11} \mathbf{g}_2 - g_{12} \mathbf{g}_1) \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial b_r} \right] \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} d\theta_1 d\theta_2, \quad (6.20)$$

kde $\bar{\sigma}$ je konstanta. Složky diskretizované a linearizované matice tuhosti jsou

$$K_{rs} = H \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial b_s} \left\{ \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial b_r} \sqrt{\det(g_{kl})} \right\} d\theta_1 d\theta_2, \quad (6.21)$$

kde můžeme využít faktu, že parciální derivace $\frac{\partial}{\partial b_r} \mathbf{F}$ vzhledem k b_s jsou nulové. Pro izotropní pole napětí máme opět

$$K_{rs} = H \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial b_s} \left\{ \left[(\bar{\sigma}^{11} g_{22} \mathbf{g}_1 - \bar{\sigma}^{12} g_{12} \mathbf{g}_2) \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial b_r} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\bar{\sigma}^{22} g_{11} \mathbf{g}_2 - \bar{\sigma}^{12} g_{12} \mathbf{g}_1) \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial b_r} \right] \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \right\} d\theta_1 d\theta_2. \quad (6.22)$$

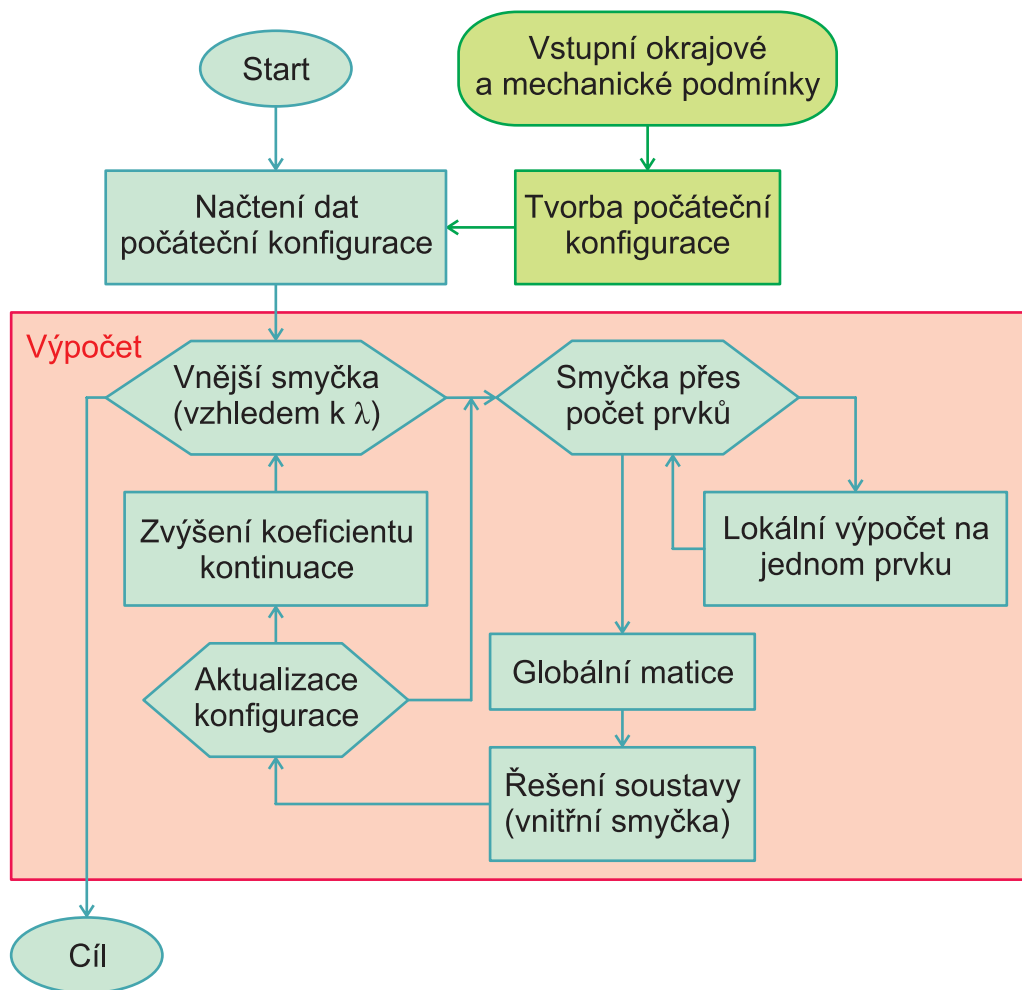
Maticе tuhosti je singulární, protože posuvy uzlů v tečných podprostorech k ploše generují stejné řešení. Tento problém můžeme ilustrovat na rovinné hranici a isotropním poli napětí - výsledkem je část roviny ohraničená touto hranicí. Různé polohy uzlů v rovině jsou tedy řešením soustavy, srovnajme s výsledkem modifikované metody na Obr. 6.24. Jednou z možností je omezit posuvy uzlů pouze na posuvy ve směru hlavních normál. Tím se sníží počet stupňů volnosti, ale zvýší se i výpočetní náročnost kvůli zjišťování vektoru hlavní normály. Další možnosti stabilizace této metody je využití homotopního zobrazení jako v [28].

$$\begin{aligned} \delta w_{\lambda} &= \lambda \delta w + (1 - \lambda) \delta w = \\ &= \lambda H \int_A (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} \det \mathbf{F} dA + (1 - \lambda) H \int_A (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} \det \mathbf{F} dA = \\ &= \lambda H \int_A (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} \det \mathbf{F} dA + (1 - \lambda) H \int_A (\mathbf{F} \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} dA \end{aligned}$$

Programové schéma s aktualizací počáteční konfigurace a s aktualizací kontinuálního faktoru je shrnuto na Obr. 6.22. Protože je napětí částečně zadáno pomocí druhého Piolova-Kirchhoffova tenzoru napětí \mathbf{S} vzhledem k počáteční konfiguraci, je výsledkem vnitřní smyčky iterací pro pevné λ pouze pole napětí, které se postupně blíží zadanému poli napětí $\boldsymbol{\sigma}$. Ve vnější smyčce iterací se mění kontinuální faktor a upraví se referenční konfigurace.

V [3] je např. singularita potlačena přidáním členu, který minimalizuje deformace na jednotlivých elementech, ale nemá žádné jiné mechanické opodstatnění. Naším cílem je využít isogeometrické prvky, oddíl 6.5, které mají větší hladkost.

Tato metoda je, stejně jako předchozí, citlivá na „rozumné“ zadání výsledného pole napětí. I v tomto případě byly publikovány články, které optimalizují nevhodné zadání, ale toto téma již nebylo předmětem našeho zájmu.



Obrázek 6.22: Programovací schéma metody aktualizovaných referenčních konfigurací

6.5 Modifikovaná metoda aktualizovaných referenčních konfigurací

6.5.1 Teorie

Rovnice (3.26) je řešena numericky pomocí isogeometrické metody, která je vybudována v kapitole 4 obdobně jako v [5]. Geometrie plochy a posuvy jsou aproximovány pomocí isogeometrických prvků. Abychom se vyhnuli nepřehlednému značení, zjednodušíme si ho:

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_{k,l}\}_{k=1,l=1}^{m,n}, \quad N_k^p(\theta_1) = N_{k,1}^p(\theta_1), \quad M_l^q(\theta_2) = N_{l,2}^{p_2}(\theta_2),$$

$$\Xi = \Xi_1, \quad \Psi = \Xi_2.$$

Protože nehrozí záměna indexů můžeme vynechat indexy p, q i proměnné θ_1, θ_2 . Také neděláme žádný rozdíl ve značení mezi skutečnou a aproximovanou funkcí. Aproximované funkce pak jsou:

$$\mathbf{X} = \sum_{k,l=1}^{m,n} M_k N_l \mathbf{P}_{kl}, \quad \mathbf{u} = \sum_{k,l=1}^{m,n} M_k N_l \mathbf{U}_{kl}, \quad \mathbf{x} = \sum_{k,l=1}^{m,n} M_k N_l (\mathbf{P}_{kl} + \mathbf{U}_{kl}).$$

V klasické metodě konečných prvků reálná funkce interpoluje uzly, zde body \mathbf{P}_{kl} řídicí sítě obecně na ploše neleží. Hledané posuvy jsou zde tedy posuvy bodů řídicí sítě. Souřadnice posuvů jsou uspořádány do sloupcového vektoru \mathbf{b} dimenze ndf (počet stupňů volnosti). Každá složka představuje x, y nebo z souřadnici posuvu \mathbf{U}_{kl} řídicího bodu. Variace gradientu deformace je vyjádřena jako variace vzhledem k těmto neznámým:

$$\delta \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_r} \delta b_r = \sum_i^3 \delta b_r \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial b_r} \otimes \mathbf{G}^i, \quad \text{pro } r = 1, \dots, ndf,$$

kde

$$\delta b_r \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial b_r} = \sum_{k,l=1}^{m,n} \frac{\partial M_k}{\partial \theta_1} N_l \frac{\partial \mathbf{U}_{kl}}{\partial b_r} \quad \text{a} \quad \delta b_r \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial b_r} = \sum_{k,l=1}^{m,n} M_k \frac{\partial N_l}{\partial \theta_2} \frac{\partial \mathbf{U}_{kl}}{\partial b_r}.$$

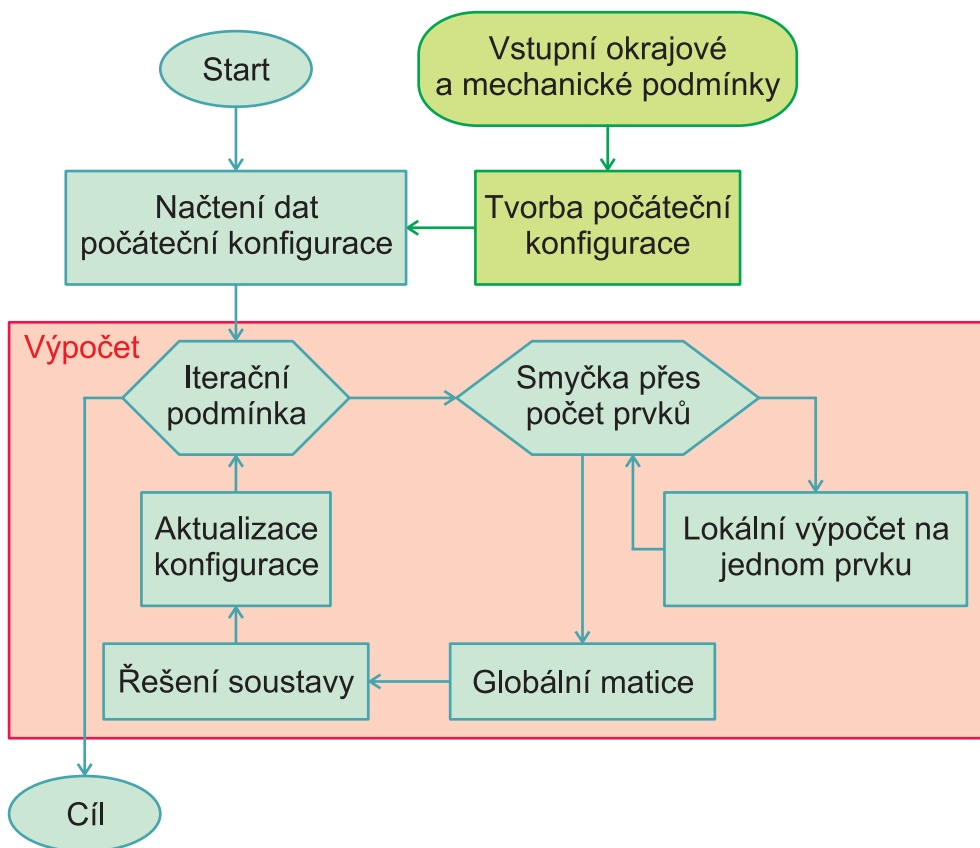
Jak uvidíme později není nutné počítat parciální derivaci vektoru \mathbf{g}_3 vzhledem k b_r . Diskretizovaná rovnice (3.26) je splněna pro libovolné $\delta \mathbf{b}$. Tím získáme nelineární soustavu ndf rovnic:

$$\frac{\partial w}{\partial b_r} = H \int_A \det \mathbf{F} (\sigma \mathbf{F}^{-T}) : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_r} dA = 0,$$

která je stejná jako (6.18) a k jejímuž řešení použijeme opět Newtonovu-Raphsonovu metodu. Linearizace (6.18) vede obdobně na soustavu lineárních rovnic

$$\text{LIN} \left(\frac{\partial w}{\partial b_r} \right) = R_r + K_{rs} \Delta b_s = 0 \quad , \text{ kde } r, s = 1, \dots, ndf,$$

jejíž vektor zatížení i matice tuhosti odpovídá symbolicky rovnicím (6.19), (6.21). V této modifikaci jsou ale odlišná vyjádření počáteční i referenční konfigurace. Vyřešíme vzniklou soustavu lineárních rovnic a řešení použijeme jako vstupní hodnotu pro další iteraci standardní Newtonovy-Raphsonovy metody. Struktura programu je patrná z Obr. 6.23, která je v porovnání s Obr. 6.22 jednodušší.



Obrázek 6.23: Programovací schéma modifikované metody aktualizovaných referenčních konfigurací

6.5.2 Demonstrační příklady

Příklad 5: Mějme dané výsledné izotropní pole napětí $\sigma = \bar{\sigma}\mathbf{I}$. Řešením je tedy minimální plocha. Zvolíme-li rovinný čtyřúhelník, výslednou plochou je rovina. Dále zvolíme stupeň obou množin báзовých funkcí roven 2 a ukotvené uzlové vektory:

$$\Xi = \Psi = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1\right).$$

Uzlové vektory určují čtyři nenulové uzlové rozteče. Tvar plochy, vzhledem ke stupni báзовých funkcí, ovlivňuje 16 řídicích bodů. Na hranici jsou řídicí body (celkem 12 bodů) pevně dané (navíc ještě rovnoměrně rozmístěné) a souřadnice zbývajících bodů představují stupně volnosti. Začneme s úmyslným vychýlením (vertikálním i horizontálním) čtyř vnitřních bodů:

$$\begin{array}{cccc} (0, 0, 0) & (0, 1/3, 0) & (0, 2/3, 0) & (0, 1, 0) \\ (1/3, 0, 0) & (1/5, 1/5, 1/4) & (1/5, 4/5, 1/4) & (1/3, 1, 0) \\ (2/3, 0, 0) & (4/5, 1/5, 1/4) & (4/5, 4/5, 1/4) & (2/3, 1, 0) \\ (1, 0, 0) & (1, 1/4, 0) & (1, 2/3, 0) & (1, 1, 0) \end{array}.$$

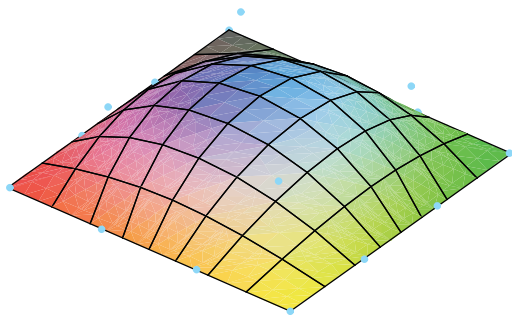
Po třech opakováních celého cyklu se výška vnitřních bodů rovná přibližně $-2 \cdot 10^{-6}$. Z Obr. 6.24 je navíc patrné, že se úhel souřadnicových křivek na ploše blíží k pravému úhlu (tedy jako pro konformní parametrizaci plochy) a vnitřní body se přizpůsobují rovnoměrně rozmístěným bodům na hranici. \triangleleft

Příklad 6: Mějme dané výsledné izotropní pole napětí $\sigma = \bar{\sigma}\mathbf{I}$. Řešením je opět minimální plocha. Zvolíme zborcený čtyřúhelník, stupeň obou množin báзовých funkcí roven 2 a ukotvené uzlové vektory:

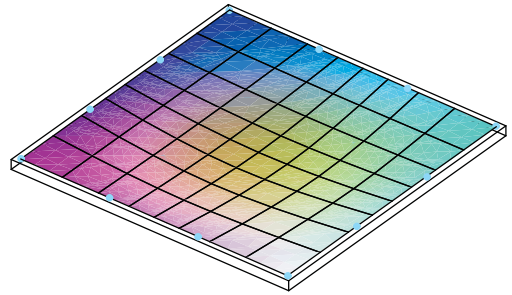
$$\Xi = \Psi = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1\right).$$

Uzlové vektory určují čtyři nenulové uzlové rozteče. Tvar plochy ovlivňuje 16 řídicích bodů. Na hranici jsou řídicí body (celkem 12 bodů) pevně dané a souřadnice zbývajících bodů představují stupně volnosti. Řídicí síť počáteční konfigurace je daná tabulkou:

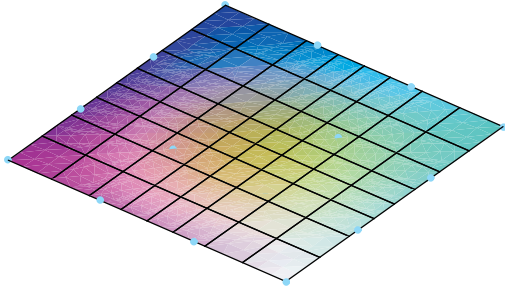
$$\begin{array}{cccc} (0, 0, 1/4) & (0, 1/3, 1/12) & (0, 2/3, -1/12) & (0, 1, -1/4) \\ (1/3, 0, 1/12) & (1/4, 1/4, 0) & (1/5, 4/5, 1/4) & (1/3, 1, -1/12) \\ (2/3, 0, -1/12) & (3/4, 1/4, 0) & (4/5, 4/5, 1/4) & (2/3, 1, 1/12) \\ (1, 0, -1/4) & (1, 1/4, -1/12) & (1, 2/3, 1/12) & (1, 1, 1/4) \end{array}.$$



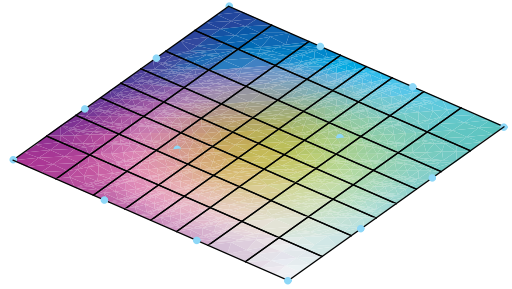
(a) Počáteční stav



(b) 1. krok

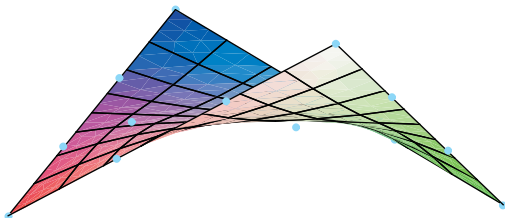


(c) 2. krok

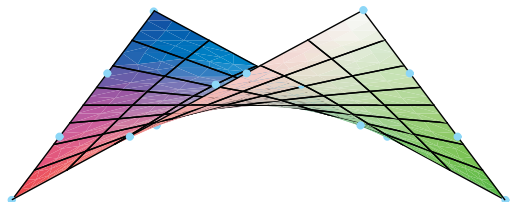


(d) 3. krok

Obrázek 6.24: Ukázka konvergence k minimální ploše



(a) Počáteční konfigurace



(b) Po dvou iteracích

Obrázek 6.25: Isogeometrické B-spline prvky druhého stupně

Na Obr. 6.25 je vidět počáteční konfigurace a membrána po dvou iteracích. \triangleleft

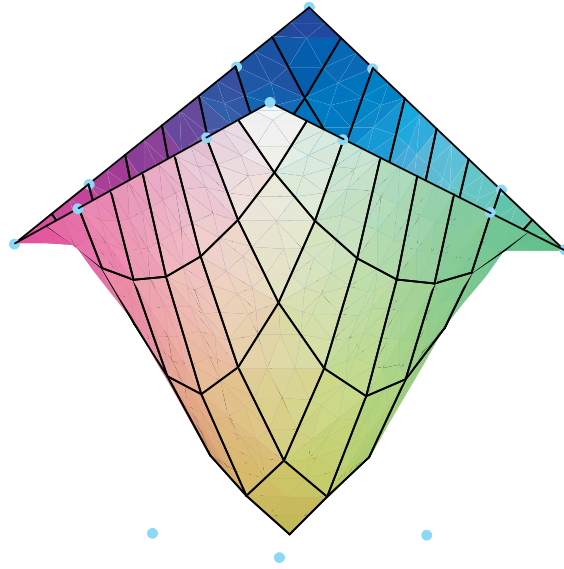
Příklad 7: Mějme dané výsledné izotropní pole napětí $\sigma = \bar{\sigma}\mathbf{I}$. Řešením je minimální plocha. Zvolíme zborcený čtyřúhelník, stupeň obou množin bázových funkcí roven 2 a ukotvené uzlové vektory:

$$\Xi = \Psi = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1\right).$$

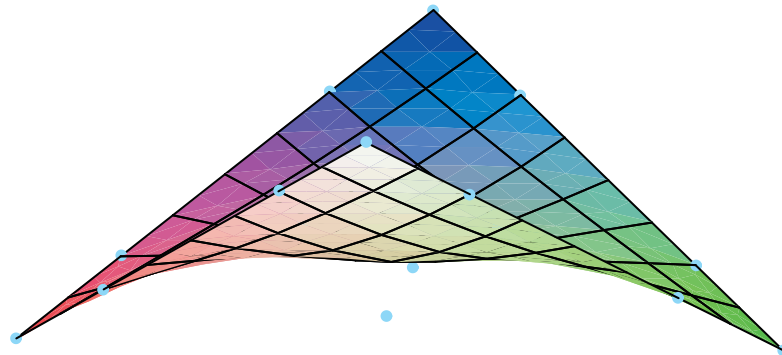
Uzlové vektory určují čtyři nenulové uzlové rozteče. Tvar plochy ovlivňuje 16 řídicích bodů. Na hranici jsou řídicí body (celkem 12 bodů) pevně dané a souřadnice zbývajících bodů představují stupně volnosti. Řídicí síť počáteční konfigurace je daná tabulkou, kde čtvrtá souřadnice je váhou daného bodu:

$$\begin{array}{cccc} (0, 0, 1/4, 1) & (0, 1/4, 1/8, 1) & (0, 3/4, -1/8, 1) & (0, 1, -1/4, 1) \\ (1/4, 0, 1/8, 1) & (1/4, 1/4, -1, 1/2) & (1/4, 3/4, -1, 1/2) & (1/3, 1, -1/8, 1) \\ (3/4, 0, -1/8, 1) & (3/4, 1/4, -1, 1/2) & (3/4, 3/4, -1, 1/2) & (3/4, 1, 1/8, 1) \\ (1, 0, -1/4) & (1, 1/4, -1/8, 1) & (1, 3/4, 1/8, 1) & (1, 1, 1/4, 1) \end{array}.$$

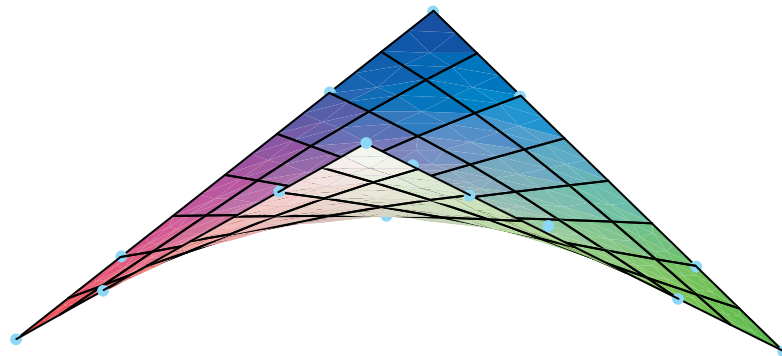
Počáteční konfigurace je záměrně značně vychýlená, aby byla patrná rychlost konvergence. Na Obr. 6.26 je vidět počáteční konfigurace a membrána po dvou iteracích. \triangleleft



(a) Počáteční konfigurace



(b) Po první iteraci



(c) Po druhé iteraci

Obrázek 6.26: Isogeometrické NURBS prvky druhého stupně

Závěr

Na stěžejní téma této práce - zjištění počátečního rovnovážného stavu membrány - je pohlíženo z několika stran. Fyzikální modelování počátečního rovnovážného stavu je vzhledem k masivnímu využití výpočetní techniky přesunuto do pozadí. Velmi podrobně se práce zabývá matematickým modelováním počátečního rovnovážného stavu minimální plochou a s využitím rovnice virtuální práce jako slabé formulace problému. Vzhledem k nelinearitě daného problému přistupují matematické modely k dalšímu zjednodušování - diskretizaci problému, např. metoda sítě nebo metody hustoty síly nahradí membránu lanovou strukturou, tedy jednodimenzionálními prvky; ostatní metody jsou založeny na dvoudimenzionálních konečných prvcích.

Výběr jednoduchého srovnávacího příkladu (hranice membrány je pevná a tvoří ji zborcený čtyřúhelník) umožnil demonstrovat všechny popsané metody a poskytnout srovnání. Zatímco metoda sítě a metoda hustoty síly jsou jednokrokové metody, jejich výsledek je řešením soustavy lineárních rovnic (matice soustavy je navíc řídká), ostatní metody se řeší iteračně a výsledky jsou tedy závislé na počtu iterací. Navíc pro metodu aktualizovaných referenčních konfigurací je nezbytná linearizace vzhledem k posuvům.

Tato práce byla během mého studia podpořena těmito granty: Interní grantová soutěž ČVUT 2006 CTU0613011, Studentská grantová soutěž ČVUT 2010 OHK1-062/10.

Mým hlavním vlastním přínosem v této práci byl zejména:

- Přehled vybraných současných numerických metod pro modelování počátečního rovnovážného stavu membránových konstrukcí.
- Detailní rozpracování těchto vybraných metod pro modelování membránových konstrukcí, které jsou doplněny o příklady, kapitola 6. Výstupy příkladů jsou z vlastních programů napsaných pro software Maple. Vstupní data jsou načítána ze softwaru Excel. V kapitole 6 jsou uvedeny i jejich programovací schémata a další příklady modelů membrán.

- Formulace dvou dílčích problémů pro modelování membránových konstrukcí, kapitola 3, podpořená souhrnem již existujících vět o řešitelnosti.
- Navržení vlastní metody modelování minimálních ploch B-spline konečnými prvky doplněné o důkazy existence řešení a sestavení vlastního programu, oddíl 5.2, publikováno v [24].
- Modifikace metody aktualizovaných referenčních konfigurací pro následnou implementaci isogeometrických NURBS prvků, sestavení vlastního programu a doplnění o výstupy z tohoto programu, kapitola 6.5.

I když byly hlavní cíle práce naplněny, daná problematika je součástí mnohem komplexnější teorie a nabízí mnoho oblastí dalšího výzkumu. Zvláště návaznost hledání počátečního rovnovážného stavu na generování stříhového plánu pro možnou realizaci konstrukce je klíčová. Další nezodpovězené otázky jsou i v oblasti isogeometrických prvků, např. jejich aproximační vlastnosti vzhledem ke zvyšování stupně nebo nejnověji v souvislosti s metodou „k-refinement“, která zlepšuje hladkost básových funkcí. V neposlední řadě se nabízí přímé ovlivnění výpočtu hledání počátečního rovnovážného stavu konkrétními materiálovými vlastnostmi membrány.

Literatura a ostatní zdroje

- [1] Bazilevs Y., Beirão da Veiga L., Cottrell J.A., Hughes T.J.R., Sangalli G.: Isogeometric analysis: Approximation, stability and error estimates for h -refined meshes. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 16 (2006), no. 7, 1031–1090.
- [2] Bonet J., Wood R.D.: *Nonlinear Continuum Mechanics for Finit Element Analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- [3] Bonet J., Mahaney J.: Form finding of membrane structures by the updated reference method with minimum mesh distortion. *Internat. J. Solids Structures* 38 (2001), no. 32-33, 5469–5480.
- [4] Brdička M., Samek L., Sopko B.: *Mechanika kontinua*. Academia, 2000.
- [5] Cottrell J.A., Hughes T.J.R., Bazilevs Y.: *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons, 2009.
- [6] Courant R.: *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, Springer, 1977.
- [7] Dierkes U., Hildebrandt S., Küster A., Wohraub O.: *Minimal surfaces 1, Boundary value problems*, Springer, Berlin, 1992.
- [8] Evans J.A., Bazilevs Y., Babuška I., Hughes T.J.R.: n -widths, sup-infs, and optimality ratios for the k -version of the isogeometric element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198 (2009), 1726–1741.
- [9] Finn R.: *Equilibrium Capillary Surface*. Springer-Verlag, 1986.
- [10] Hirňšal Z.: *Textilní architektura. Fasády 1* (2005).
- [11] Linkeová I.: *NURBS křivky*. Nakladatelství ČVUT, 2007.

- [12] Marsh D.: Applied Geometry for Computer Graphics and CAD. Springer, 2000.
- [13] Maurin B., Motro R.: The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes. *Engineering Structures* 20 (1998), no. 8, 712–719.
- [14] Monterde J.: The Plateau-Bézier problem. *Mathematics of surfaces. Lecture Notes In Computer Science* 2768 (2003), 262–273.
- [15] Monterde J.: Bézier surface of minimal area: The Dirichlet approach. *Comput. Aided Geom. Design* 21 (2004), no. 2, 117–136.
- [16] Nitsche J.C.C.: A new uniqueness theorem for minimal surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.* 52 (1973), no. 3, 319–329.
- [17] Oprea J.: *The Mathematics of Soap Films: Exploration with Maple[®]*. American Mathematical Society, 2000.
- [18] Otto F.: *Zugbeanspruchte Konstruktionen. Band 2*. Ulstein Fachverlag, 1962.
- [19] Piegl L., Tiller W.: *The NURBS Book*. Springer, 1996.
- [20] Schek H.-J.: The force density method for form finding and computation of general networks. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 3 (1974), no. 1, 115–134.
- [21] Siev A., Eidelman J.: Stress analysis of prestressed suspended roofs. *Journal of the Structural Division (ASCE)* 90 (1964), no. ST4.
- [22] Strang G., Fix G.J.: *An analysis of the finite element method*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973.
- [23] Tiller W.: Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces. *Computer-Aided Design* 24 (1992), no. 8, 445–453.
- [24] Vecková J.: Minimal surfaces. *Creat. Math. Inform.* 16 (2007), 108–113.
- [25] Vecková J.: Metoda hustoty plošného napětí. *Sborník 17. konference studentů VŠTEZ*, 2009.
- [26] Vecková J.: Věty o existenci a jednoznačnosti řešení Plateauova problému. *Sborník 18. konference studentů VŠTEZ*, 2010.
- [27] Vecková J.: Modified update reference strategy method based on B-spline finite elements (připravený k publikaci).

- [28] Wüchner R., Bletzinger K.-U.: Stress-adapted numerical form finding of prestressed surfaces by the updated reference strategy. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 64 (2005), no. 2, 143–166.