

O odhadech topologické entropie intervalových zobrazení

MARTIN SOUKENKA

Školitel: doc. RNDr. Jozef Bobok, CSc.

Obsah

Poděkování	5
Prohlášení	6
Předmluva	8
1 Topologická entropie	11
2 Entropie versus kardinality úrovnových množin	15
2.1 Přehled výsledků ukazujících na souvislost entropie s kardinalitami úrovnových množin	15
2.1.1 C^1 -zobrazení T na kompaktní varietě	17
2.1.2 C^0 -zobrazení T na jednorozměrném prostoru (intervalu, kružnici, stromě)	18
2.2 Některé výsledky ukazující, že souvislost entropie s kardinalitami úrovnových množin nemá obecnou platnost	19
2.3 Otázky řešené v článku “Irreducibility, infinite level sets and small entropy”	21
2.3.1 Hlavní výsledky v článku “Irreducibility, infinite level sets and small entropy”	21
2.4 Irreducibility, infinite level sets and small entropy - úplná verze článku	23
2.4.1 Introduction	23
2.4.2 Definitions and known results	24
2.4.3 Constructions	26
2.4.4 The main result	30
3 Entropie speciálních typů zobrazení	33
3.1 Po částech monotonní zobrazení	33
3.2 Spočetně po částech monotonní zobrazení	36
3.3 Otázky řešené v článku “On piecewise affine interval maps with countably many laps”	39
3.3.1 Hlavní výsledky v článku “On piecewise affine interval maps with countably many laps”	39

3.4	On piecewise affine interval maps with countably many laps	
	- úplná verze článku	41
3.4.1	Introduction, main results	41
3.4.2	Definition of class \mathcal{F}	42
3.4.3	\mathcal{F} is a conjugacy class	43
3.4.4	Maps with constant slope in \mathcal{F}	46
3.4.5	Maps preserving the Lebesgue measure in \mathcal{F}	49
Apendix - základní pojmy a poznatky		53
I.	Měrově–teoretická entropie, nebloudivé body	53
II.	Topologický stupeň C^1 –zobrazení	54
III.	Topologická entropie a variační princip	54
IV.	Ergodická míra	54
V.	Sardova věta	56
VI.	Seznam značení a symbolů	57
Literatura		57

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému školiteli doc. RNDr. Jozefu Bobokovi, CSc. za přátelské a inspirativní vedení v celém průběhu mého doktorského studia.

Prohlášení

Práce byla vypracována během doktorského studia na Katedře matematiky Fakulty stavební Českého vysokého učení technického v Praze. Kapitola 2 a kapitola 3 obsahuje přehled doposud známých výsledků z oblasti jedno-rozměrných dynamických systémů souvisejích s odhady topologické entropie těchto systémů a původní netriviální výsledky, které je rozšiřují. Tyto původní výsledky jsou předmětem následujících odborných článků

1. Bobok J., Soukenka M., *Irreducibility, infinite level sets and small entropy*, submitted to Real Analysis Exchange, 12 pp., 2009,
2. Bobok J., Soukenka M., *On piecewise affine interval maps with countably many laps*, submitted to Discrete and Continuous Dynamical Systems, 12 pp., 2009,

uvedených zde v plném znění v anglickém jazyce.

Motto: „*Existuje obecný princip, podle něhož i hlupák může položit otázky, na které ani sto učenců není schopno odpovědět. V souladu s tímto principem nyní zformuluji některé problémy.*“

Vladimír Igorevich Arnold

Předmluva

V. I. Arnold ve své knize *Teorie singularit a její aplikace* uvádí: „Matematický popis světa spočívá v jemné souhře mezi spojitými a nespojitými objekty“. Jiný slavný matematik John v. Neumann kolem roku 1950 poznamenal ([42], str. 221), že dynamické systémy lze rozdělit do dvou tříd: stabilní systémy, jejichž vývoj lze predikovat pomocí počítačů, a nestabilní systémy, které vykazují citlivou závislost na počátečních podmínkách, a proto je lze snadno stabilizovat a řídit pomocí počítačů.

Idea *dynamického systému* spočívá ve snaze popsat mechanismus, skrze něhož stav systému (fyzikálního, chemického, biologického, ekonomického, sociologického) přejde v nový stav během jednotky času. Základy moderní teorie dynamických systémů položil na počátku 20. století francouzský učenec Henry Poincaré. Zajímavý historický přehled zásadních výsledků v oblasti dynamických systémů od dob Keplera lze nalézt v [38]. Pod pojmem *dynamický systém* dále rozumíme spojitě zobrazení $X \rightarrow X$, kde X je kompaktní metrický prostor.

V souvislosti s rozvojem výpočetní techniky v průběhu 70. a 80. let obrací část matematické obce (např. Y. Sinai, O. Sharkovsky, R. Bowen, W. Szlenk, M. Misiurewicz, Z. Nitecki, F. Przytycki, B. Weiss, E. Glasner, J. Yorke a mnoho dalších) pozornost ke studiu málorozměrných a diskretních dynamických systémů¹ včetně konceptu *měrově-teoretické a topologické entropie*. Jedním z důvodů byla skutečnost, že jednorozměrné systémy ($\dim X = 1$) poskytovaly dobré modely mnoha problémů ve fyzice, biologii, mechanice, elektrotechnice a dalších oborech a současně umožňovaly užití numerických experimentů s názornými grafickými výstupy (např. slavný bifurkační diagram logistického zobrazení). Dalším důvodem popularity jednorozměrných systémů byla celková situace v teorii dynamických systémů. Mnoho problémů, které byly považovány za důležité, bylo buď vyřešeno, nebo byly tyto problémy považovány za příliš obtížné. Proto byla pozornost obrácena k jednodušším systémům, které jsou však natolik komplexní, aby zachytily charakteristiku složitějšího systému. Takovou charakteristikou může být např. *chaotičnost*, resp. *deterministická chaotičnost* systému.

¹Spojitou analogií diskretních systémů jsou diferenciální a parciální diferenciální rovnice: je-li f spojitá funkce, pak evoluce proměnné $x \in X$ může být dána předpisem $x_{n+1} = f(x_n)$, na který lze pohlížet také jako na diferenční rovnici $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n$. Definujeme-li funkci $g(x)$ předpisem $g(x) := f(x) - x$, lze předchozí rovnici zapsat ve tvaru

$$x_{n+1} - x_n = g(x_n),$$

kterou lze číst jako „změní-li se n o jedničku, změní se x o hodnotu $g(x)$ “. Toto je diskretní analogie diferenciální rovnice

$$x'(t) = g(x(t)).$$

pro spojitou proměnnou t

Jako ilustraci reálných dějů a procesů, ve kterých byla pozorována taková komplexita - deterministický chaos - uveďme aspoň následující ([42], str. 2): lasery a nelineární optika, tekutiny blízko vzniku turbulence, plasma, chemické reakce, klasický problém tří těles, urychlovače částic, biologické modely populační dynamiky, stimulace srdečních komor, epidemiologické modely, finanční časové řady.

Diskrétní dynamické systémy poskytují dostatečně zajímavý předmět výzkumu, v němž lze studovat všechny důležité pojmy dynamických systémů, jakými jsou např. periodicitu, rekurentnost apod.

Závěrem tohoto úvodu okomentujme pojem *entropie*, který je ústředním tématem předkládané práce. Pro bližší informace odkazujeme na přehled stran historie a aplikací tohoto pojmu od Tomasze Downarowizce na internetových stránkách [19].

Pojem *entropie* prvně použil v roce 1865 německý fyzik Rudolf Clausius z řeckého en- = v + trope = obrácení. Podle etymologů slovo označuje formu energie, ve kterou libovolná energie neodvratně přejde - v neužitečné teplo. Idea byla inspirována Carnotem a tím, co je dnes známo jako *druhý termodynamický zákon*. Kolem roku 1875 Ludwig Boltzmann a Willard Gibbs použili pojmu entropie v pravděpodobnostním pozadí statistické mechaniky a tato idea byla později rozvinuta Maxem Planckem. V roce 1932 John von Neumann zobecnil entropii do kvantové mechaniky. Koncept entropie v dynamických systémech představil Andrei N. Kolmogorov a precizoval Jakov Sinai (tzv. *Kolmogorovova-Sinaiho entropie*).

Pojmu entropie se dnes používá v mnoha jiných oblastech (jako je např. sociologie), kde již nepředstavuje rigorózní kvantitativní charakter jako v matematice či fyzice. Obyčejně se v těchto oborech entropií míní nepořádek, chaos, či rozklad k diverzitě. V přenesené analogii lze energii ve fyzikálním systému srovnat s množstvím vody v jezerech, řekách a mořích. Pouze voda, která je nad hladinou moří, může být přeměněna na užitečnou práci (tj. pohánět turbínu). Entropie představuje vodu, která je obsažena v mořích.

V dynamických systémech pojem *topologické entropie* měří exponenciální rychlost růstu počtu rozlišitelných orbit délky n při n jdoucí nade všechny meze. O odhadech topologické entropie v případě některých jednorozměrných dynamických systémů pojednává tato práce.

Kapitola 1

Topologická entropie

Topologický dynamický systém (dále jen dynamický systém) je zpravidla tvořen dvojicí (X, T) , kde X je kompaktní metrický prostor a $T: X \rightarrow X$ spojitě zobrazení. V dynamickém systému uvažujeme *trajektorie* a *orbity bodů* prostoru X : pro $x \in X$, trajektorie $t_x: \mathbb{K} \rightarrow X$ je dána vztahem $t_x(k) = T^k x$, $k \in \mathbb{K}$, kde T^k značí k -násobné složení zobrazení T a $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ (invertibilní případ¹) nebo $\mathbb{K} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ². Pod orbitou bodu x rozumíme obor hodnot zobrazení t_x .

V konkrétním dynamickém systému koexistují (různé) typy trajektorií a orbit. Například v nejjednodušším případě identického zobrazení T jsou všechny trajektorie konstantní, tedy orbity všech bodů jsou jednobodové. Na druhé straně existují příklady dynamických systémů vykazujících značnou míru *komplexity*³, ve kterých lze detekovat vedle konečných orbit také orbity husté v nekonečném metrickém prostoru X . Poučným je v tomto směru důležitý příklad *symbolického dynamického systému*.

Příklad 1.0.1 Pro přirozené číslo $m \geq 2$ a $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ uvažujme množinu $X_{m, \mathbb{K}} = \{0, 1, \dots, m-1\}^{\mathbb{K}}$ opatřenou metrikou

$$\varrho(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{K}} \frac{|x_i - y_i|}{m^{|i|}}.$$

Je známo, že $(X_{m, \mathbb{K}}, \varrho)$ tvoří kompaktní metrický prostor [22]. Zobrazení $T_{\mathbb{K}}$ definované na $X_{m, \mathbb{K}}$ vztahem

$$(T_{\mathbb{K}}x)_i = x_{i+1}$$

je na $X_{m, \mathbb{K}}$ spojitě; dvojice $(X_{m, \mathbb{K}}, T_{\mathbb{K}})$ tedy tvoří dynamický systém⁴, tzv. *oboustranný posun*, resp. *jednostranný posun* pro $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, resp. $\mathbb{K} = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Není obtížné nahlédnout, že:

¹ T^{-1} značí zobrazení inverzní k T

²trajektorie je iterační posloupností bodu x vzhledem k zobrazení T

³složitosti

⁴symbolický dynamický systém na posloupnostech m symbolů

- Orbita bodu $x \in X_{m,\mathbb{Z}}$ je konečná, právě když je posloupnost x periodická, a tedy množina bodů s konečnou orbitou je hustá v $(X_{m,\mathbb{Z}}, \varrho)$.
- Orbita bodu $x \in X_{m,\mathbb{Z}}$ je hustá v $(X_{m,\mathbb{Z}}, \varrho)$, právě když každý prvek množiny $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{0, \dots, n-1\}^k$ tvoří úsek $x_{ij} = x_i \dots x_j$, $0 \leq i \leq j$, posloupnosti x , a tedy množina bodů s hustou orbitou je G_δ hustá v $(X_{m,\mathbb{Z}}, \varrho)$.
- Ke každému $x \in X_{m,\mathbb{Z}}$ a každému kladnému ε existuje $y \in X_{m,\mathbb{Z}}$ takové, že⁵

$$\varrho(x, y) < \varepsilon \quad \& \quad \sup_{k > 0} \varrho(T_{\mathbb{Z}}^k x, T_{\mathbb{Z}}^k y) \geq 1.$$

Existuje důležitá metoda, umožňující odlišit dynamické systémy s vysokou komplexitou. Spočívá v určení tzv. *topologické entropie* (dále často jen entropie) daného systému. Původní definici topologické entropie publikovali autoři Adler, Konheim a McAndrew v roce 1965 [1] jako topologický protějšek již tehdy známé Kolmogorovovy měrově–teoretické entropie⁶. V tomto textu použijeme Bowenovu definici z roku 1971 [15]⁷.

Definice 1.0.2 Bud' (X, T) dynamický systém s metrikou ϱ . Řekneme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon > 0$ je množina $E \subset X$ (n, ε) –separovaná, jestliže pro každé dva různé body $x, y \in E$ platí

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \varrho(T^k x, T^k y) > \varepsilon.$$

Označme $s(n, \varepsilon)$ maximální kardinalitu (n, ε) –separované množiny v X a položme $s(\varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log s(n, \varepsilon)$. Veličina

$$h_{\text{top}}(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} s(\varepsilon)$$

se nazývá *topologická entropie dynamického systému* (X, T) , nebo rovněž *topologická entropie zobrazení* T .

Poznámka 1.0.3 V této poznámce uvádíme základní vlastnosti topologické entropie [43]. Bud' (X, T) dynamický systém. Pak:

- $h_{\text{top}}(T) \in [0, \infty]$ ⁸.
- $h_{\text{top}}(T) = h_{\text{top}}(T|_{\Omega(T)})$, kde $\Omega(T)$ je množina nebloudivých bodů⁹ dynamického systému (X, T) .

⁵každý bod $x \in X_{m,\mathbb{Z}}$ je tedy “citlivým” výchozím stavem

⁶viz Apendix

⁷též Dinaburg [18]

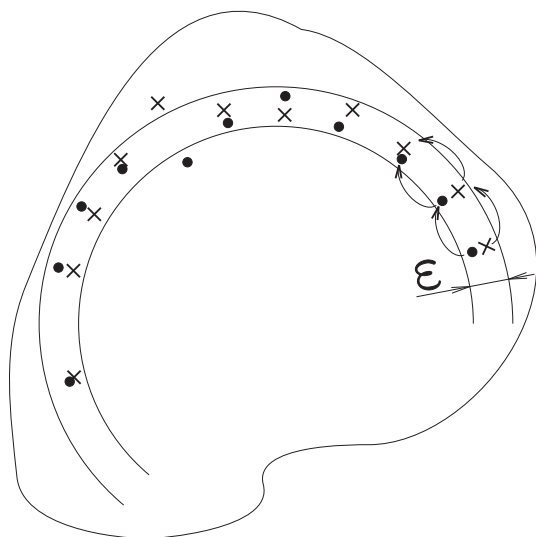
⁸entropie může nabývat hodnot 0 a ∞

⁹viz Apendix

- Je-li X konečný, $h_{\text{top}}(T) = 0$.
- $h_{\text{top}}(I) = 0$, kde $T = I$ značí identické zobrazení na X .
- Pro každé $k \in \mathbb{K}$, $h_{\text{top}}(T^k) = |k| \cdot h_{\text{top}}(T)$. Je-li tedy $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, pak $h_{\text{top}}(T) = h_{\text{top}}(T^{-1})$.
- $h_{\text{top}}(T) \geq h_{\text{top}}(S)$, jestliže pro dynamické systémy (X, T) a (Y, S) platí $\varphi \circ T = S \circ \varphi$ na X , kde $\varphi : X \rightarrow Y$ je spojitě surjektivní zobrazení. Speciálně tedy platí $h_{\text{top}}(T) = h_{\text{top}}(S)$, je-li φ homeomorfismus.
- Je-li $(X \times Y, T \times S)$ součinnový dynamický systém daný předpisem

$$T \times S: X \times Y \rightarrow X \times Y, T \times S(x, y) = (Tx, Sy),$$

pak $h_{\text{top}}(T \times S) = h_{\text{top}}(T) + h_{\text{top}}(S)$.



K Bowenově definici topologické entropie.

Příklad 1.0.4 Buď $(X_{m, \mathbb{K}}, T_{\mathbb{K}})$ posun z Příkladu 1.0.1. Ukažme, že

$$h_{\text{top}}(T_{\mathbb{Z}}) = h_{\text{top}}(T_{\mathbb{N}}) = \log m.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in (0, 1)$; dva prvky $x, y \in X_{m, \mathbb{K}}$ s různými úseky $x_0 \dots x_{n-1}$, $y_0 \dots y_{n-1}$ jsou (n, ε) -separované. Platí tedy $s(n, \varepsilon) \geq m^n$. Ke zvolenému ε existuje $i_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$2 \cdot \sum_{i \geq i_0} \frac{m-1}{m^{|i|}} < \varepsilon;$$

odtud plyne, že je-li pro $n > i_0$ množina $E \subset X_{m,\mathbb{K}}$ (n, ε) -separovaná a $x, y \in E$ jsou různé, musí existovat index $i \in \{0, \dots, n - 1 + i_0 - 1\}$, pro který $x_i \neq y_i$, tj. $s(n, \varepsilon) \leq m^{n-1+i_0}$ a tvrzení snadno plyne z Definice 1.0.2.

V závěru této úvodní kapitoly uvedme (za všechny) poměrně nedávný důležitý výsledek, ze kterého plyne, že v dynamickém systému s kladnou topologickou entropií je nespočetně mnoho bodů, které jsou “citlivým” výchozím stavem.

Věta 1.0.5 [4] *Bud' (X, T) dynamický systém s metrikou ρ . Je-li topologická entropie $h_{\text{top}}(T)$ kladná, existuje nespočetná množina $S \subset X$ taková, že pro libovolné různé body $x, y \in S$ platí¹⁰*

$$(1.1) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho(T^k x, T^k y) > 0 \quad \& \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \rho(T^k x, T^k y) = 0.$$

Důsledek 1.0.6 *Za předpokladů Věty 1.0.5 existuje nespočetná množina $S_0 \subset S$ s vlastností:*

$$(1.2) \quad \forall \varepsilon > 0 \forall x \in S_0: B(x, \varepsilon) \cap S_0 \text{ je nespočetná,}$$

kde $B(x, \varepsilon) = \{y \in X; \rho(x, y) < \varepsilon\}$.

¹⁰dynamický systém obsahující nespočetnou množinu S s vlastností (1.1) je tzv. Li-Yorke chaotický

Kapitola 2

Entropie versus kardinality úrovňových množin

Bud' (X, T) dynamický systém. *Úrovňovou množinou* bodu $x \in X$ (zobrazení T) míníme úplný vzor $T^{-1}(x)$ bodu x . Zobrazení T je surjektivní, resp. homeomorfismem na prostoru X , právě když je každá úrovňová množina neprázdná, resp. jednobodová. V této kapitole se budeme věnovat přesnějším (dolním) odhadům topologické entropie dynamického systému (X, T) odvozeným z kardinalit úrovňových množin zobrazení T . Pomocí příkladů a výsledků převzatých z citované literatury ukážeme, že tento vztah je zásadně podmíněn volbou prostoru X a také dalších vlastností¹ zobrazení T .

2.1. Přehled výsledků ukazujících na souvislost entropie s kardinalitami úrovňových množin

Zcela základní je z hlediska našeho předmětu zájmu pojem m -podkovy² v dynamickém systému (X, T) :

Definice 2.1.1 Soubor J_1, J_2, \dots, J_m po dvou disjunktních uzavřených podmnožin X tvoří m -podkovu dynamického systému (X, T) , jestliže

$$(2.1) \quad \bigcap_{i=1}^m T J_i \supset \bigcup_{i=1}^m J_i.$$

Přímo z Definice 1.0.2 plyne

Věta 2.1.2 *Má-li dynamický systém (X, T) m -podkovu, pak $h_{\text{top}}(f) \geq \log m$.*

¹kromě spojitosti

²neinvertibilní obdoby takzvané Smaleovy podkovy [40]

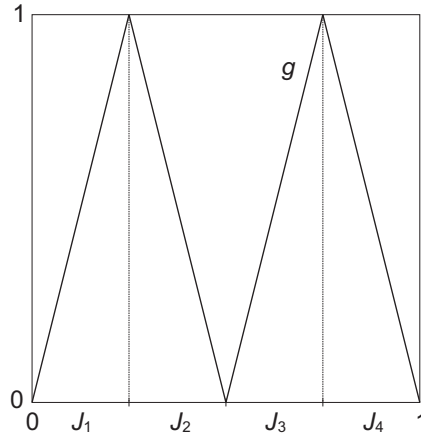
Důkaz. Vlastnost (2.1) zaručuje, že pro každý prvek $i \in \{1, \dots, m\}$ a libovolné $x \in J_i$ existuje vzor $x_j \in J_j \cap T^{-1}(x)$. Je tedy množina

$$\bigcap_{j=0}^{n-1} T^{-j} J_{k_j}$$

neprázdná pro libovolnou n -tici $J_{k_0}, J_{k_1}, \dots, J_{k_{n-1}}$ množin souboru J_1, J_2, \dots, J_m . Odtud dostáváme, že pro

$$\varepsilon < \min_{0 \leq i < j \leq m} \text{dist}(J_i, J_j)$$

platí pro čísla $s(n, \varepsilon)$ z Definice 1.0.2 odhad $s(n, \varepsilon) \geq m^n$, a tedy i tvrzení $h_{\text{top}}(f) \geq \log m$ dokazované věty. \square



Obrázek 1. Intervaly J_1, J_2, J_3, J_4 tvoří speciální 4–podkovu pro g .

Poznámka 2.1.3 Předcházející věta je tedy přímým důsledkem Definice 1.0.2. K jejímu důkazu jsme speciálně použili nerovnost

$$\forall x \in X_0: \text{card } T^{-1}(x) \geq m,$$

kde $X_0 = \bigcap_{j=0}^{\infty} T^{-j}(\bigcup_{i=1}^m J_i)$ je kompaktní podmnožina X a $(X_0, T|_{X_0})$ je dynamický systém.

V souvislosti s podkovami uvedme výsledek Misiurewicze [27], podle kterého pro spojitě zobrazení intervalu je kladná topologická entropie ekvivalentní s existencí speciálních podkov.

Věta 2.1.4 [27] *Bud' (X, T) dynamický systém, kde X je interval $[0, 1]$ a $h_{\text{top}}(T) > 0$. Pak existují posloupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných přirozených čísel takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$, pro každé n zobrazení T^{k_n} má s_n -podkovu a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \log s_n = h_{\text{top}}(T).$$

Věta 2.1.4 má mnoho důležitých důsledků pro (dolní horní) odhady entropie intervalového zobrazení. Uvedme alespoň

Důsledek 2.1.5 *Bud' $X = [0, 1]$ v dynamickém systému (X, T) . Nechť má úrovněová množina $T^{-1}(x)$ nejvýše $M < \infty$ prvků pro každé $x \in X$. Pak $h_{\text{top}}(T) \leq \log M$.*

Důkaz. Pro posloupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Věty 2.1.4 a číslo M platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq M^{k_n}$; Věta 2.1.4 pak dává odhad $h_{\text{top}}(T) \leq \log M$. \square

Důsledek 2.1.6 *Bud' $X = [0, 1]$ v dynamickém systému (X, T) s entropií $h_{\text{top}}(T) > 0$. Ke každému kladnému ε existuje kladné δ takové, že podmínka $\sup_{x \in [0, 1]} |Tx - Sx| < \delta$ implikuje $h_{\text{top}}(S) > h_{\text{top}}(T) - \varepsilon$.*

Důkaz. Zvolme dostatečně velké členy k_n, s_n posloupností $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby splňovaly nerovnost $(s_n - 2)^{1/k_n} > e^{h_{\text{top}}(T) - \varepsilon}$. Víme, že T^{k_n} má s_n -podkovu; je-li $\sup_{x \in [0, 1]} |Tx - Sx| < \delta$ pro dostatečně malé δ , má S^{k_n} $(s_n - 2)$ -podkovu. Z Věty 2.1.2 a Poznámky 1.0.3 pak plyne $h_{\text{top}}(S^{k_n}) \geq \log(s_n - 2)$ a $h_{\text{top}}(S) \geq \log(s_n - 2)^{1/k_n} > h_{\text{top}}(T) - \varepsilon$. \square

2.1.1. C^1 -zobrazení T na kompaktní varietě

V roce 1977 Misiurewicz a Przytycki publikovali výsledek dávající do souvislosti topologickou entropii s topologickým stupněm zobrazení³.

Věta 2.1.7 [28] *V dynamickém systému (X, T) buďte X kompaktní orientovatelná varieta a C^1 -zobrazení⁴ $T : X \rightarrow X$. Pak*

$$(2.2) \quad h_{\text{top}}(T) \geq \log |\deg T|.$$

V Příkladu 2.2.5 ukážeme, že porušení vlastnosti spojitě diferencovatelnosti zobrazení T v jediném bodě může vést k neplatnosti odhadu (2.2).

Jak ukázali Bobok a Nitecki v [11], stupeň zobrazení lze v (2.2) nahradit dolním odhadem kardinalit množin $T^{-1}(x)$ pro libovolnou regulární hodnotu⁵ x zobrazení T . K přesné formulaci jejich výsledku budeme potřebovat následující definici.

Definice 2.1.8 Zobrazení T dynamického systému (X, T) se nazývá m -*násobné* na podmnožině $Y \subset X$, jestliže pro každé $x \in Y$ obsahuje úrovněová množina $T^{-1}(x)$ alespoň m bodů. Je-li $Y = X$, nazývá se T *globálně m -násobné*.

³viz Appendix

⁴ C^1 -zobrazení (hladké zobrazení) je spojitě zobrazení, jehož derivace je také spojitě zobrazení.

⁵Bod q je regulární hodnotou zobrazení f , jestliže derivace ve všech bodech p množiny $f^{-1}(q)$ je různá od nuly.

Věta 2.1.9 [11] *V dynamickém systému (X, T) buďte X kompaktní varieta a C^1 -zobrazení $T : X \rightarrow X$ m -násobné na množině regulárních hodnot. Pak*

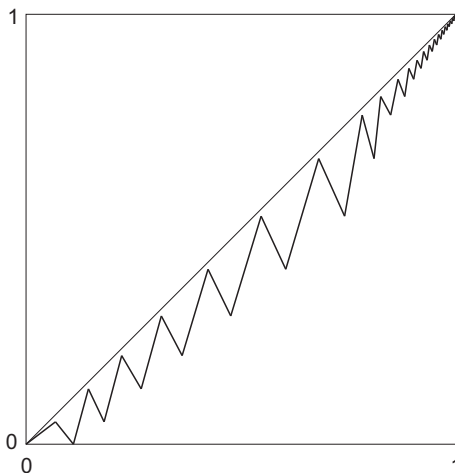
$$h_{\text{top}}(T) \geq \log m.$$

2.1.2. C^0 -zobrazení T na jednorozměrném prostoru (intervalu, kružnici, stromě)

Označme symbolem $C([0, 1])$ množinu všech spojitých zobrazení intervalu $[0, 1]$ do sebe. V roce 1994 formuloval Coven [16] problém nejlepšího dolního odhadu topologické entropie globálně 2-násobného zobrazení z $C([0, 1])$. Tato otázka byla vyřešena Bobokem v [8], později tentýž autor dokázal obecnější výsledky týkající se m -násobných zobrazení z $C([0, 1])$ [10], a společně s Niteckim také kružnice [11] a konečného topologického stromu [12]. Tyto výsledky postupně uvádíme ve větách 2.1.11, 2.1.15 a 2.1.18.

Definice 2.1.10 [11] Podmnožina $Y \subset X$ se nazývá *kospočetná*, je-li její komplement $X \setminus Y$ (nejvýše) spočetná množina. Řekneme, že pro $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ je $T : X \rightarrow X$ *kospočetně m -násobné*, jestliže je globálně 2-násobné a zároveň m -násobné na nějaké kospočetné podmnožině $Y \subset X$.

Věta 2.1.11 [10] *Pro topologickou entropii kospočetně m -násobného $T \in C([0, 1])$ platí $h_{\text{top}}(T) \geq \log m$.*



Obrázek 2. Zobrazení s nulovou entropií.

Příklad 2.1.12 Obrázek 2 ukazuje graf zobrazení T z $C([0, 1])$ s vlastnostmi: $\text{card } T^{-1}(0) = 2$, $\text{card } T^{-1}(1) = 1$ a T je 3-násobné na množině $(0, 1)$. Zároveň množina nebloudivých bodů $\Omega(T) = \{0, 1\}$, a tedy dle Poznámky 1.0.3 platí $h_{\text{top}}(T) = 0$.

Definice 2.1.13 Bud' (X, T) dynamický systém. Řekneme, že zobrazení T nemá malou úrovnívou množinu, jestliže existuje $\alpha > 0$ takové, že průměr libovolné úrovnívé množiny $T^{-1}(x)$, $x \in X$, je větší než α .

Poznámka 2.1.14 V Definici 2.1.13 požadujeme, aby ke každému $x \in X$ existovaly dva body $x', x'' \in X$ takové, že $Tx' = Tx'' = x$ a $\varrho(x', x'') > \alpha$. Z této podmínky přímo plyne, že T je globálně 2-násobné a $h_{\text{top}}(T) \geq \log 2$, neboť pro $\varepsilon < \alpha$ platí $s(n, \varepsilon) \geq 2^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Věta 2.1.15 [11] *Bud' (S, T) dynamický systém, kde S je kružnice. Je-li T kospočetně m -násobné zobrazení, které nemá malou úrovnívou množinu, platí $h_{\text{top}}(T) \geq \log m$.*

Poznámka 2.1.16 Má-li zobrazení T ve Větě 2.1.15 stupeň d a $|d| \geq 2$, nemá T malou úrovnívou množinu. Věta 2.1.15 dává novou informaci v případě, že $m > |d|$.

Příklad 2.1.17 Bud' $S := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ kružnice. Ztotožněním koncových bodů intervalu $[0, 1]$ v Příkladu 2.1.12 obdržíme globálně 2-násobné zobrazení kružnice $T: S \rightarrow S$ s nulovou topologickou entropií (pro každé $\alpha > 0$ existuje úrovnívá množina o průměru menším než α). Analogicky lze sestrojít globálně m -násobné ($m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) zobrazení kružnice s nulovou topologickou entropií.

Konečně v nedávno publikovaném článku [12] autoři rozšířili výsledky Věty 2.1.11 z intervalu na libovolný konečný strom.

Věta 2.1.18 [12] *Bud' (X, T) dynamický systém, kde X je konečný strom. Je-li zobrazení T kospočetně m -násobné, platí $h_{\text{top}}(T) \geq \log m$.*

2.2. Některé výsledky ukazující, že souvislost entropie s kardinalitami úrovnívých množin nemá obecnou platnost

Příklad 2.2.1 [43] Bud' $(X_{m, \mathbb{Z}}, T_{\mathbb{Z}})$ oboustranný posun. V Příkladu 1.0.4 jsme ukázali, že $h_{\text{top}}(T_{\mathbb{Z}}) = \log m$. Současně lze snadno nahlédnout, že zobrazení $T_{\mathbb{Z}}$ je homeomorfismem na prostoru $X_{m, \mathbb{Z}}$.

Existuje jiný pro naše účely důležitý výsledek, jehož autorem je Hochman [20].

Příklad 2.2.2 [20] Bud' $([0, 1]^{\mathbb{N} \cup \{0\}}, T)$ dynamický systém, kde zobrazení T je dáno předpisem $(Tx)_i = x_{i+1}$, $x \in [0, 1]^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ ⁶. Ke každému $m \in \mathbb{N}$ existuje $X_m \subset [0, 1]^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ s vlastnostmi:

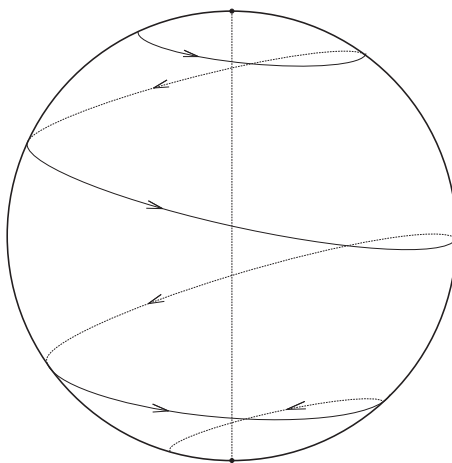
⁶takzvaný Bebutův dynamický systém

- (i) $(X_m, T = T|X_m)$ je dynamický systém,
- (ii) pro každé $x \in X_m$ množina $T^{-1}(x)$ obsahuje alespoň m různých prvků,
- (iii) topologická entropie (X_m, T) je rovna nule,
- (iv) zobrazení $T: X_m \rightarrow X_m$ má dvě ergodické borelovské invariantní míry na X_m , tj. $\mathcal{E}(T) = \{\mu_1, \mu_2\}$, kde $\text{supp } \mu_1 = \{x_0\}$ ($Tx_0 = x_0$) a $\text{supp } \mu_2 = X_m$ ⁷.
- (v) Existuje $x \in X_m$, jehož orbita⁸ je hustá v X_m .

Poznámka 2.2.3 Příklad 2.2.2 je v následujícím smyslu nejlepší možný: existuje-li v dynamickém systému (X, T) bod $x \in X$, jehož orbita je hustá a $\mathcal{E}(T) = \{\mu\}$ (systém má jedinou ergodickou invariantní míru), existují v X body, jejichž úrovněvé množiny jsou jednobodové.

Příklad 2.2.4 [12] Ke každému $m \geq 2$ existuje dynamický systém $([0, 1], T)$ s vlastnostmi:

- (i) T je globálně 2-násobné,
- (ii) T je m -násobné na množině $Y = [0, 1] \setminus K$, kde K je Cantorova množina,
- (iii) $h_{\text{top}}(T) = \log 2$.



Obrázek 3. Dynamický systém (X, T) na Riemannově sféře X ; $h_{\text{top}}(T) = 0$.

⁷viz Apendix

⁸viz Kapitulu 1

Příklad 2.2.5 [41] (Obrázek 3) Zobrazení T Riemannovy sféry na sebe s 0 a ∞ jako pevnými body, kde pro $0 < |z| < \infty$ (a pevně zvolené $m \geq 2$)

$$Tz = \frac{z^m}{2|z|^{m-1}},$$

má topologický stupeň⁹ m ; pro $0 < |z| < \infty$ platí $|Tz| = |z|/2$, a tedy množina nebloudivých bodů sestává právě jen z pevných bodů $0, \infty$, tj. v souladu s Poznámkou 1.0.3, $h_{\text{top}}(T) = 0$. Zobrazení T není spojitě diferencovatelné v odpuzujícím pevném bodě ∞ .

2.3. Otázky řešené v článku “Irreducibility, infinite level sets and small entropy”

Bud' (X, T) dynamický systém. V Definicí 2.1.8 jsme zavedli pojem m -násobného zobrazení T na podmnožině $Y \subset X$. Vzniká přirozená otázka, jak vhodně volit v závislosti na (X, T) množinu Y , aby m -násobnost na Y , doplněná globální 2-násobností, byla postačující pro dolní odhad topologické entropie $h_{\text{top}}(T) \geq \log \alpha(m)$, kde $\limsup_{m \rightarrow \infty} \alpha(m) = \infty$.

V případě C^0 -zobrazení intervalu z citovaných výsledků plyne:

- volba kospočetné množiny Y je postačující - Věta 2.1.11
- volba Y , při které je $X \setminus Y$ řídká, není postačující - Příklad 2.2.4

2.3.1. Hlavní výsledky v článku “Irreducibility, infinite level sets and small entropy”

Před formulací hlavních výsledků připomeňme, že uzlovým bodem zobrazení $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ míníme bod, pro který $D^+T(x) = D^-T(x) = \infty$ a $D_+T(x) = D_-T(x) = -\infty$ ¹⁰.

Věta 2.4.12 *Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dynamický systém $([0, 1], T)$, ve kterém:*

- (i) T není monotonní na žádném podintervalu $[0, 1]$ a T zachovává Lebesgueovu míru,
- (ii) uzlové body T tvoří hustou podmnožinu $[0, 1]$ a pro G_δ hustou množinu $Y \subset [0, 1]$, úroveňová množina $T^{-1}(y)$ je nekonečná pro každé $y \in Y$,
- (iii) $h_{\text{top}}(T) \leq \varepsilon + \log 2$.

⁹viz Appendix

¹⁰Diniho derivace jsou nekonečné

Důsledek 2.4.13 *Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dynamický systém $([0, 1], T)$, ve kterém:*

- (i) *T je topologicky mixující,*
- (ii) *pro G_δ hustou množinu $Y \subset [0, 1]$ plné Lebesgueovy míry, úroňová množina $T^{-1}(y)$ je nekonečná pro každé $y \in Y$,*
- (iii) *$h_{\text{top}}(T) \leq \varepsilon + \log 2$.*

2.4. Irreducibility, infinite level sets and small entropy - úplná verze článku

2.4.1. Introduction

For a set X , we call a subset $Y \subset X$ cocountable if its complement $X \setminus Y$ is (at most) countable, and say that a map $f: X \rightarrow X$ is cocountably m -fold if it is globally 2-fold and m -fold on some cocountable subset $Y \subset X$.

In [10] the author proved the following estimate on topological entropy:

Theorem 2.4.1 *The topological entropy of any continuous cocountably m -fold map $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfies $h_{\text{top}}(f) \geq \log m$.*

This result is rather delicate, as there is a simple Raith's example of a continuous map $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ that is m -fold (for an arbitrarily chosen $m \in \mathbb{N}$) except at $y = 1$, which has a single preimage point, but its non-wandering set consists of the fixed endpoints, so that the entropy is zero (see [11] for more detailed information). It is a folklore knowledge that analogous examples can be constructed on any n -dimensional manifold (orientable or non-orientable, also with boundary).

Moreover, in [12] the authors showed that the set of points, where the m -fold conditions fail in the hypotheses of Theorem 2.4.1, cannot be allowed to be uncountable, even if it is nowhere dense. Namely, for each integer $m > 0$ there exists a continuous map $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ such that f is globally 2-fold, f is m -fold on a set $Y = [0, 1] \setminus K$, where K is a nowhere dense, closed (uncountable) set and at the same time $h_{\text{top}}(f) = \log 2$.

Despite Theorem 2.4.1 and related examples, the problem of understanding of relationship of two characteristics of an interval (or a tree) map - its topological entropy and cardinalities of level sets - is not completely solved. On the one hand the proofs used in [10], [12] are rather difficult with many technicalities, on the other hand all known (counter)examples work with a "poor" set of non-wandering points. Thus, one could expect some strengthened version of Theorem 2.4.1 stated for a class of irreducible interval maps (transitive, with a dense set of periodic points) proved by essentially simplified methods.

As a canonical expression of mentioned insufficient grasp of the subject we can introduce the following conjectures:

Conjecture 2.4.2 *Any continuous nowhere differentiable interval map preserving the Lebesgue measure has infinite topological entropy.*

We recall that by a knot point of function f we mean a point x where $D^+f(x) = D^-f(x) = \infty$ and $D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty$.

Conjecture 2.4.3 *Any continuous interval map preserving the Lebesgue measure λ and with a knot point λ -a.e. has infinite topological entropy.*

Note that the existence of continuous interval maps used in hypotheses has been proved in [7].

The goal of this paper is to provide more sophisticated examples related to Conjectures 2.4.2, 2.4.3. To this goal we investigate continuous piecewise affine interval maps with countably many laps and preserving the Lebesgue measure. We construct such maps having finitely many knot points and estimate their topological entropy. As the main result of this paper stated in Theorem 2.4.12 we obtain the following: to any $\varepsilon > 0$ we construct a continuous interval map $g = g_\varepsilon$ such that (i) g is nowhere monotone and preserves the Lebesgue measure (irreducibility); (ii) knot points of g are dense in $[0, 1]$ and for a G_δ dense set of z 's, the set $g^{-1}(\{z\})$ is infinite (infinite level sets); (iii) $h_{\text{top}}(g) \leq \varepsilon + \log 2$ (small entropy). Two possible applications are presented in Corollary 2.4.13 and Theorem 2.4.14.

The paper is organized as follows. In Section 2.4.2 we give some basic notation, definitions and known results (Theorems 2.4.5, 2.4.6, 2.4.8). Section 2.4.3 is devoted to the both local and global perturbations and the map g cited above is constructed.

Finally, in Section 2.4.4 we prove the main results - Theorem 2.4.12 and its Corollary 2.4.13. We also present one possible application on the n -dimensional case - Theorem 2.4.14.

2.4.2. Definitions and known results

As general references one can use [3] and [21]. In particular, one can find an introduction to both measure-theoretic and topological entropy there.

Let $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be a continuous map, for short often called an interval map. By $\mathfrak{M}([0, 1])$ we denote the set of all Borel normalized measures on $[0, 1]$. The weak* topology on $\mathfrak{M}([0, 1])$ is defined by taking the sets

$$V_\mu(f_1, \dots, f_k; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \left\{ \nu: \left| \int f_j d\mu - \int f_j d\nu \right| < \varepsilon_j, j = 1, \dots, k \right\}$$

as a basis of open neighborhood for $\mu \in \mathfrak{M}([0, 1])$ with $\varepsilon_j > 0$ and f_j being a continuous function defined on $[0, 1]$. The map f transports every measure $\mu \in \mathfrak{M}([0, 1])$ into another measure $f_*\mu \in \mathfrak{M}([0, 1])$. In what follows if we say “measure” we in fact mean Borel normalized measure and if we measure some set then we assume that it is measurable. The support of μ is the smallest closed set $S \equiv \text{supp}\mu$ such that $\mu(S) = 1$.

If $\mu = f_*\mu$ then μ is said to be invariant (μ is preserved by f). It is equivalent to the condition $\mu(f^{-1}(S)) = \mu(S)$ for any measurable $S \subset [0, 1]$. Let $\mathfrak{M}(f)$ be the set of measures preserved by f . A measure $\mu \in \mathfrak{M}(f)$ the $\text{supp}\mu$ of which coincides with one periodic orbit (cycle) is said to be a *CO*-measure and the set of all *CO*-measures which are concentrated on cycles is denoted by $\mathfrak{P}(f)$.

We say that $S \subset [0, 1]$ is f -invariant if $f(S) \subset S$. A measure $\mu \in \mathfrak{M}(f)$ is called ergodic if for any f -invariant set $S \subset [0, 1]$ either $\mu(S) = 0$ or $\mu(S) = 1$. We denote the set of all f -invariant ergodic measures by $\mathcal{E}(f)$. If μ is ergodic then either $\text{supp}\mu = \text{orb}(p)$ for some periodic point $p \in \text{Per}(f)$ or $\text{supp}\mu$ is a perfect set.

For an interval map f preserving the Lebesgue measure λ the set of all its periodic points is dense in $[0, 1]$. It is a consequence of the following statement.

Theorem 2.4.4 [5] *Let $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be an interval map preserving the Lebesgue measure. The set $\mathfrak{B}(f)$ is dense in $\mathfrak{M}(f)$ (in the weak* topology).* \square

Moreover we have following ergodic decomposition.

Theorem 2.4.5 [35] *Let $\mu \in \mathfrak{M}(f)$. Then there is a measure m on $\mathcal{E}(f)$ such that $\mu(S) = \int_{\mathcal{E}(f)} \lambda(S) dm$ for any measurable set S .* \square

Fix $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ and $x \in [0, 1]$. The Lyapunov exponent, $\lambda_f(x)$, is given by

$$\lambda_f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)|$$

if the limit exists. The Lyapunov characteristic $\chi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ is defined as

$$(2.3) \quad \chi_f(x) = \begin{cases} \lambda_f(x), & \lambda_f(x) > 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The following known theorem (its one-dimensional version) will be one of the key results when proving Theorem 2.4.12.

Theorem 2.4.6 (*the Margulis-Ruelle inequality*) (see [26, pp. 281-285]). *Let $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be a piecewise Lipschitz map, let μ be an invariant measure for f , and assume that f is differentiable μ -a.e. Then*

$$h_\mu(f) \leq \int_{\text{supp}\mu} \chi_f d\mu.$$

\square

For a pair (T, g) with $T \subset \mathbb{R}$ closed set and continuous map $g: T \rightarrow T$, $g_T: \text{conv}T \rightarrow \text{conv}T$ is a piecewise affine “connect-the-dots” interval map given by (T, g) . An interval map $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ has a subsystem (T, g) if $T \subset [0, 1]$ is closed, $g = f|_T$ and $g(T) \subset T$. A subsystem (T, g) of f is piecewise monotone, resp. strictly ergodic if g_T is piecewise monotone, resp. if there is exactly one measure $\mu \in \mathfrak{M}(f)$ such that $\text{supp}\mu = T$.

Proposition 2.4.7 *Let $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be piecewise affine possibly with countably many laps and having a piecewise monotone strictly ergodic subsystem (T, g) supporting an invariant measure μ with $h_\mu(f) > 0$. Then for each $x \in T$,*

$$\lambda_f(x) = \int_{[0,1]} \log |f'| d\mu \in (0, \infty).$$

Proof. We have

$$\frac{1}{n} \log |(f^n)'| = \frac{1}{n} \log \left(\prod_{j=0}^{n-1} |f'(f^j)| \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log |f'(f^j)|$$

and the right-hand sums converge on the set T uniformly to a constant $\lambda_\mu = \int_{[0,1]} \log |f'| d\mu$ - see [43, Theorem 6.19, p.160]. The value λ_μ is positive by (2.3), our assumption $h_\mu(f) > 0$ and Theorem 2.4.6. Since (T, g) is piecewise monotone, the number λ_μ is less than ∞ .

The Variational principle represents a basic relationship between measure-theoretic and topological entropy. In the context of interval maps one can restrict attention to the subset of strictly ergodic piecewise monotone pairs and corresponding invariant measures.

Theorem 2.4.8 [9] *Let f be an interval map. Then*

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{(T,g)} h_\mu(f),$$

where the supremum is taken over all strictly ergodic piecewise monotone subsystems (T, g) of f and corresponding invariant measures μ . □

2.4.3. Constructions

Local perturbation

In the first subsection of this section we describe a specific local perturbation of an interval map, i.e. a change of definition of a map on a “small” subset of its domain. All is summarized in Definition 2.4.9.

For $n \geq 1$, the maps α_5 are “connect-the-dots” maps with the dots (see Figure 4(a))

$$\{(0, 0), (1/5, 1), (2/5, 0), (3/5, 1), (4/5, 0), (1, 1)\}.$$

In order to describe how we will perturb maps we start with a map $\kappa: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ defined as the uniform limit of a sequence $\{\kappa_n\}_{n \geq 1}$: fix

a sequence $\{\delta_n\}_{n \geq 1}$ of positive real numbers with $\delta_1 = 1/2$ and such that $10\delta_{n+1} < \delta_n$; then the intervals $K_n = [1/2 - \delta_n, 1/2 + \delta_n]$ satisfy

$$(2.4) \quad [0, 1] = K_1 \supset K_2 \supset K_3 \cdots, \quad 10\lambda(K_{n+1}) < \lambda(K_n).$$

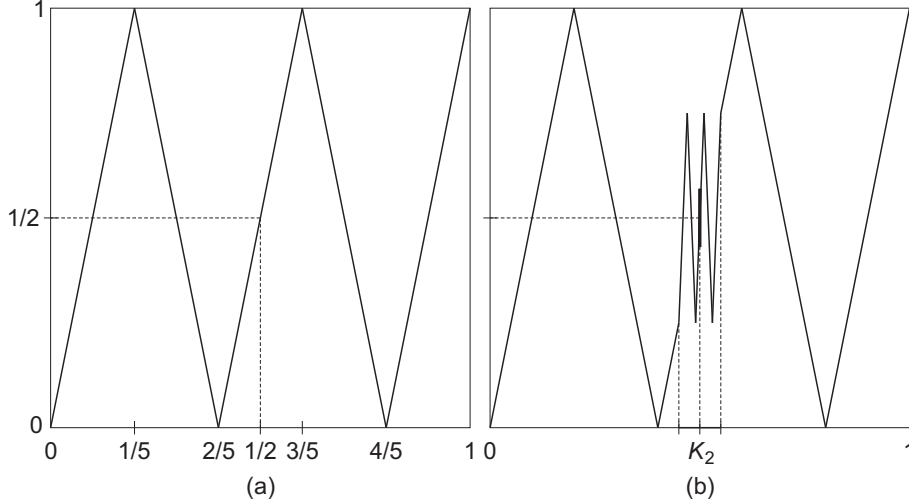


Figure 4. (a) The map α_5 ; (b) The map κ_3 .

We construct maps $\kappa_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ inductively:

($n = 1$): $\kappa_1 = \alpha_5$.

($n > 1$): If the map κ_{n-1} is already defined, we put (see Figure 4(b) for $n = 3$) $\kappa_n = \kappa_{n-1}$ on $[0, 1] \setminus K_n$ and $\kappa_n = h \circ \alpha_5 \circ h_n^{-1}$ on K_n , where h_n , resp. h is affine, preserves orientation and maps the unit interval onto K_n , resp. $\kappa_{n-1}(K_n)$.

Clearly, each κ_n is continuous and it preserves the Lebesgue measure. Moreover, by our construction and (2.4)

$$\sup_{x \in [0,1]} |\kappa_n(x) - \kappa_{n-1}(x)| \leq 5^n \lambda(K_n) < \frac{5^n}{10^{n-1}} = \frac{5}{2^{n-1}},$$

hence the map $\kappa = \lim_n \kappa_n$ exists, it is continuous and the Lebesgue measure preserving again. Since the map κ depends on the sequence $\Delta = \{\delta_n\}_{n \geq 1}$, we will sometimes use the notation $\kappa = \kappa[\Delta]$.

Let $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be an interval map, consider a point $x \in (0, 1)$ and a $\beta > 0$ such that $0 \leq x - \beta < x + \beta \leq 1$ and $f(x - \beta) < f(x + \beta)$, let $\kappa[\Delta]$ be as above for some Δ .

Definition 2.4.9 By an increasing (x, β, Δ) -perturbation of f we mean a continuous map $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ given by $\tilde{f} = f$ on $[0, 1] \setminus [x - \beta, x + \beta]$ and $\tilde{f} = r_{x,\beta} \circ \kappa[\Delta] \circ d_{x,\beta}^{-1}$ on $[x - \beta, x + \beta]$, where $d_{x,\beta}$, resp. $r_{x,\beta}$ is affine, preserves orientation and maps the unit interval onto $[x - \beta, x + \beta]$, resp. $[f(x - \beta), f(x + \beta)]$. If $f(x - \beta) > f(x + \beta)$, a decreasing (x, β, Δ) -perturbation of f is defined analogously by using the map $1 - \kappa[\Delta]$ instead of $\kappa[\Delta]$.

Global perturbation

In the second subsection we apply above local perturbation repeatedly to obtain a global change of definition of a map on a dense subset of its domain.

For a piecewise affine map f (possibly with countably many laps) let $W(f)$ be the set consisting of all points in which f is not differentiable and endpoints 0, 1. Let $\{J_m\}_{m \geq 1}$ be the sequence of all rational subintervals of $(0, 1)$. Consider the full tent map $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ given by $f(x) = 1 - |1 - 2x|$, $x \in [0, 1]$.

Fix an $\varepsilon > 0$. We inductively define maps g_m :

($m = 0$): $g_0 = f$, $x_0 = 1$, $p_0 = 0$.

($m > 0$): Since by Theorem 2.4.4 the map g_{m-1} has a dense set of periodic points and each point from $[0, 1)$ has at least two g_{m-1} -preimages, there is a point x_m such that

$$(2.5) \quad x_m \in J_m, \quad x_m \notin \text{Per}(g_{m-1}), \quad g_{m-1}(x_m) = p_m \in \text{Per}(g_{m-1}),$$

$$(2.6) \quad p_m \notin \bigcup_{j=1}^{m-1} \text{orb}(p_j), \quad x_m \notin W(g_{m-1}) \cup \{x_0, \dots, x_{m-1}\};$$

for a sequence $\{k_n^m\}_{n \geq 1}$ of positive integers fulfilling

$$(2.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(|5^n g'_{m-1}(x_m)|)}{k_n^m + 1} < \frac{\varepsilon}{2^m},$$

there is a sequence $\Delta_m = \{\delta_n^m\}_{n \geq 1}$ (of sufficiently small delta's, shortly, sufficiently small Δ_m) and a corresponding (increasing or decreasing) (x_m, β_m, Δ_m) -perturbation g_m of g_{m-1} such that for each $j \in \{1, \dots, m\}$ and $n \geq 1$ ($K_n^j = [1/2 - \delta_n^j, 1/2 + \delta_n^j]$),

$$(2.8) \quad x \in d_{x_j, \beta_j}(K_n^j) \implies \{g_m^i(x)\}_{i=1}^{k_n^j} \cap d_{x_j, \beta_j}(K_n^j) = \emptyset,$$

$$(2.9) \quad \max\{\lambda(g_m^i(d_{x_j, \beta_j}(K_n^j))) : i = 0, \dots, k_n^j\} < 1/n$$

and, in particular, for $[x_m - \beta_m, x_m + \beta_m] = d_{x_m, \beta_m}([0, 1])$,

$$(2.10) \quad \lambda(g_m([x_m - \beta_m, x_m + \beta_m])) < 1/m.$$

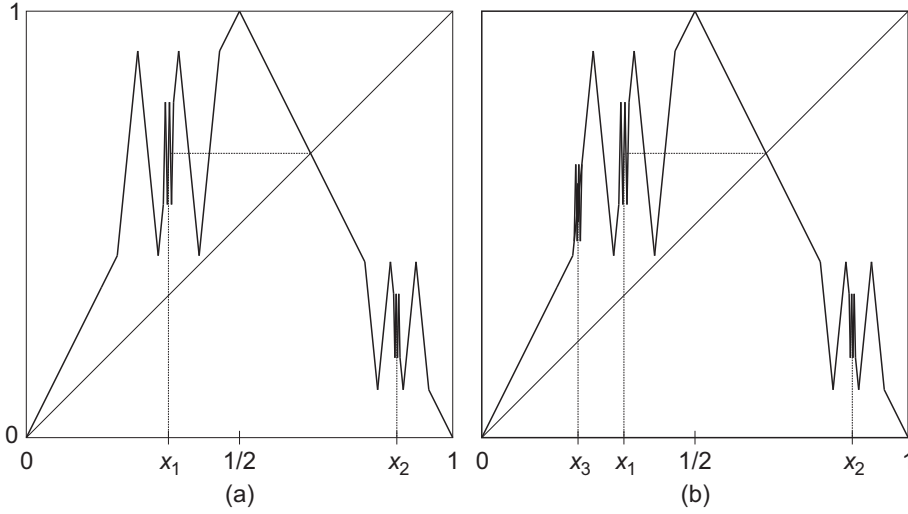


Figure 5. (a) The map g_2 ; (b) The map g_3 .

We will argue the properties (2.8), (2.9) in more details.

Claim 2.4.10 *If (2.8), (2.9) is true for $j \in \{1, \dots, m-1\}$ and g_{m-1} then the sequence $\Delta_m = \{\delta_n^m\}_{n \geq 1}$ fulfilling (2.8), (2.9) for $j \in \{1, \dots, m\}$ and corresponding g_m also exists.*

Proof. Since by (2.6)

$$\text{orb}(p_m) \cap \bigcup_{j=1}^{m-1} \text{orb}(p_j) = \emptyset,$$

the (2.9) applied on g_{m-1} means that for a sufficiently small $\tilde{\Delta}_m$ and corresponding \tilde{g}_m the properties (2.8), (2.9) remain true for \tilde{g}_m up to finitely many n 's. Taking appropriately Δ_m smaller than $\tilde{\Delta}_m$ (if necessary), we obtain the map g_m fulfilling (2.8), (2.9) for $j \in \{1, \dots, m\}$ and every n .

Claim 2.4.11 *For any $m \in \mathbb{N}$ and any invariant measure $\mu \in \mathfrak{M}(g_m)$,*

$$\int_{[x_m - \beta_m, x_m + \beta_m]} \log |g'_m| d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(|5^n g'_{m-1}(x_m)|)}{k_n^m + 1}.$$

Proof. By the representation Theorem 2.4.5 it is sufficient to assume that μ is ergodic. Let $x \in \text{supp} \mu$ be a generic point for μ (see [43]). Putting $L_n = d_{x_m, \beta_m}(K_n^m)$, from (2.8) we get

$$(2.11) \quad \mu(L_n) \leq \frac{1}{k_n^m + 1};$$

by our definition of (x_m, β_m, Δ_m) -perturbation (g_m of g_{m-1})

$$(2.12) \quad |g'_m| = |5^n g'_{m-1}(x_m)| \text{ on } L_n \setminus L_{n+1}.$$

Since $[x_m - \beta_m, x_m + \beta_m] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (L_n \setminus L_{n+1})$, from (2.11) and (2.12) we obtain

$$\begin{aligned} \int_{[x_m - \beta_m, x_m + \beta_m]} \log |g'_m| \, d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{L_n \setminus L_{n+1}} \log |g'_m| \, d\mu \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{L_n} \log |g'_m| \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(|5^n g'_{m-1}(x_m)|)}{k_n^m + 1}. \end{aligned}$$

Notice that each g_m preserves the Lebesgue measure and by (2.10)

$$\sup_{x \in [0,1]} |g_m(x) - g_{m-1}(x)| < 1/m;$$

the reader can easily see that

$$(2.13) \quad g = \lim_m g_m$$

is defined well and it preserves the Lebesgue measure again.

2.4.4. The main result

We recall that by a knot point of a function f we mean a point x where $D^+ f(x) = D^- f(x) = \infty$ and $D_+ f(x) = D_- f(x) = -\infty$.

Theorem 2.4.12 *The continuous interval map g defined by (2.13) has the following properties:*

- (i) g is nowhere monotone and preserves the Lebesgue measure;
- (ii) knot points of g are dense in $[0, 1]$ and for a G_δ dense set Z of z 's, the set $g^{-1}(\{z\})$ is infinite;
- (iii) $h_{\text{top}}(g) \leq \varepsilon + \log 2$.

Proof. The property (i) directly follows from our construction of g .

Let us prove (ii). It follows from (2.5) and our choice of the intervals J_m that the sequence $\{x_m\}$ is dense in $[0, 1]$. We will show that g has a knot point at every x_m . By the property (2.6) of our construction, for every $k \geq m$ hold true equalities

$$(2.14) \quad g(x) = g_k(x) = g_m(x) \text{ for every } x \in \{x_m\} \cup d_{x_m, \beta_m}(W(\kappa[\Delta_m])).$$

Since the map $\kappa[\Delta_m]$ has a knot point at $1/2$ and the maps r_{x_m, β_m} , d_{x_m, β_m} are affine, Definition 2.4.9 and (2.14) give us that also each of the maps g_k , g , $k \geq m$ has a knot point at $x_m = d_{x_m, \beta_m}(1/2)$. It means that each of the sets

$$S_m := \{z \in [0, 1]: \#g^{-1}(\{z\}) > m\}^\circ$$

is open and dense in $[0, 1]$ hence $Z = \bigcap_m S_m$ is G_δ dense.

(iii) Let us fix g_m .

Using Theorem 2.4.8 let us fix a continuous strictly ergodic invariant measure $\mu \in \mathfrak{M}(g_m)$ with $h_\mu(g_m) > 0$, denote $S = \text{supp}\mu$. Then $(S, \iota = g_m|_S)$ is an infinite minimal subsystem of g_m and each point of S is (uniformly) recurrent. The map g_m is piecewise affine with countably many laps accumulated exactly in points x_1, \dots, x_m . By (2.5), $S \cap \{x_1, \dots, x_m\} = \emptyset$ hence the set S is a subset of finitely many laps of g_m . It implies that the map ι_S is Lipschitz and since μ measures any countable set by the zero, both the piecewise affine maps g_m, ι_S are differentiable μ -a.e. Applying Theorem 2.4.6, Proposition 2.4.7 and (2.3) we get

$$0 < h_\mu(g_m) = h_\mu(\iota_S) \leq \int_{[0,1]} \lambda_{\iota_S} d\mu = \int_{[0,1]} \log |g'_m| d\mu.$$

Putting $J = \bigcup_{j=1}^m [x_j - \beta_j, x_j + \beta_j]$, Claim 2.4.11 and the properties (2.5)-(2.8) imply

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \log |g'_m| d\mu &\leq \sum_{j=1}^m \int_{[x_j - \beta_j, x_j + \beta_j]} \log |g'_j| d\mu + \int_{[0,1] \setminus J} \log |g'_m| d\mu \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(|5^n g'_{j-1}(x_j)|)}{k_n^j + 1} \right) + \log 2 \leq \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon}{2^j} + \log 2, \end{aligned}$$

i.e., using Theorem 2.4.8 and the Variational principle (see [43]),

$$(2.15) \quad h_\mu(g_m) \leq h_{\text{top}}(g_m) \leq \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon}{2^k} + \log 2.$$

Since the topological entropy is lower semicontinuous on the space of all continuous interval maps equipped with the supremum norm (see [27]) and $g = \lim_m g_m$, the conclusion $h_{\text{top}}(g) \leq \varepsilon + \log 2$ follows from (2.15).

It can be rather easily shown (and we let it to the reader) that the map g satisfies: for every open subsets U, V of $[0, 1]$ there is an $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$ whenever $n \geq n_0$ (g is topologically mixing).

Corollary 2.4.13 *There is a continuous interval map $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ such that*

- (i) f is topologically mixing;
- (ii) for some G_δ dense $Y \subset [0, 1]$ of the full Lebesgue measure, $f^{-1}(\{y\})$ is infinite for each $y \in Y$;
- (iii) $h_{\text{top}}(f) \leq \varepsilon + \log 2$.

Proof. Let Z be the set satisfying the property (ii) of Theorem 2.4.12. There is a homeomorphism $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ such that $\lambda(Y = h(Z)) = 1$. Then for $f = h \circ g \circ h^{-1}$ and each $y \in Y$ we get

$$\#f^{-1}(\{y\}) = \#h((g^{-1}(h^{-1}(h(z)))) = \infty,$$

i.e. the property (ii) is fulfilled. The properties (i), (iii) remain preserved for the conjugated map f . \square

As a direct consequence of Theorem 2.4.12 we will let to the reader the proof of the following natural generalization.

Theorem 2.4.14 *Let us consider the map $G: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ defined as the product map $G = \underbrace{g \times g \times \cdots \times g}_{n\text{-times}}$. The map G fulfils:*

- (i) G is topologically mixing and preserves the Lebesgue measure;
- (ii) for a G_δ dense set of z 's, the set $G^{-1}(\{z\})$ is infinite;
- (iii) $h_{\text{top}}(G) \leq \varepsilon + n \log 2$.

Kapitola 3

Entropie speciálních typů zobrazení

V této kapitole uvažujeme výlučně *intervalový* dynamický systém (X, T) , kde $X = [0, 1]$. Často tedy bude postačující mluvit pouze o zobrazení T .

Intervalem *vlastnosti* \mathcal{V} (monotonie, diferencovatelnosti, apod.) zobrazení T rozumíme jakýkoliv uzavřený podinterval $I \subset [0, 1]$, pro který má zúžení $T|I$ vlastnost \mathcal{V} .

Definice 3.0.1 Řekneme, že zobrazení T je po částech *vlastnosti* \mathcal{V} , jestliže lze $[0, 1]$ vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha intervalů *vlastnosti* \mathcal{V} zobrazení T .

Definice 3.0.2 Řekneme, že zobrazení T je spočetně po částech *vlastnosti* \mathcal{V} , jestliže lze $[0, 1]$ vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha intervalů *vlastnosti* \mathcal{V} zobrazení T .

Hlavním cílem této kapitoly je srovnání vybraných vlastností po částech monotonních, resp. spočetně po částech monotonních zobrazení.

3.1. Po částech monotonní zobrazení

V roce 1980 publikovali Misiurewicz a Szlenk článek [29], výsledky kterého umožnily lépe rozumět topologické entropii po částech monotonního zobrazení, a v některých případech ji i vypočítat.

Označme c_n minimální počet intervalů monotonie zobrazení T^n , jejichž sjednocením je celý interval $[0, 1]$, $V(T^n)$ nechť značí *variaci* zobrazení T^n na intervalu $[0, 1]$.

Věta 3.1.1 [29] *Bud' T po částech monotonní zobrazení. Pak*

$$h_{\text{top}}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c_n = \inf_n \frac{1}{n} \log c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \max \left(0, \frac{1}{n} \log V(T^n) \right).$$

Speciálně tedy, $h_{\text{top}}(T) \leq (1/n) \log c_n$ pro každé n .

Definice 3.1.2 Řekneme, že zobrazení T má konstantní sklon α , jestliže je T po částech monotónní a na každém intervalu monotonie je T afinní se sklonem v absolutní hodnotě rovným α .

Věta 3.1.1 umožňuje snadno určit topologickou entropii zobrazení s konstantním sklonem.

Důsledek 3.1.3 Buď T zobrazení s konstantním sklonem α . Pak $h_{\text{top}}(T) = \max(0, \log \alpha)$.

Důkaz. Pro každé n přirozené platí $V(T^n) = \alpha^n$. □

Příklad 3.1.4 Buď S stanové zobrazení, $Tx = 1 - |1 - 2x|$, $x \in [0, 1]$. Platí $c_n = V(T^n) = 2^n$, a tedy podle Věty 3.1.1, $h_{\text{top}}(T) = \log 2$. Zřejmě je T zobrazením s konstantním sklonem 2. Použitím tohoto faktu lze snadno ověřit, že ke každé otevřené množině $U \subset [0, 1]$ existuje n přirozené takové, že $T^n U = [0, 1]$.

Definice 3.1.5 Řekneme, že dynamický systém (X, T) , resp. zobrazení T je *tranzitivní*, jestliže pro každé dvě neprázdné otevřené podmnožiny $U, V \subset X$ existuje n přirozené takové, že $T^n U \cap V \neq \emptyset$.¹

Poznámka 3.1.6 Tranzitivita dynamického systému (X, T) je tedy jistým jevem nerozložitelnosti: lze ukázat, že v tranzitivním dynamickém systému existuje G_δ hustá $X_0 \subset X$ taková, že každý prvek $x \in X_0$ má orbitu hustou v prostoru X ; trajektorie bodu z X_0 je tedy (nekonečněkrát) ovlivňována každou restrikcí $T|U$, kde U je libovolná otevřená podmnožina X .

Poznámka 3.1.7 V Příkladu 3.1.4 jsme ukázali, že stanové zobrazení T je tranzitivní.

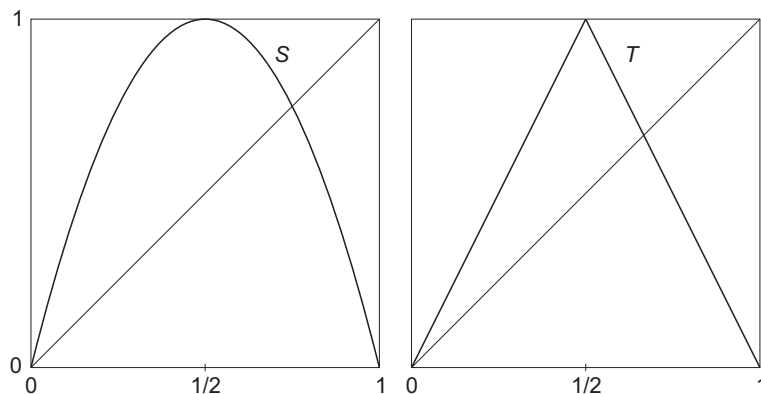
Klasický výsledek, který souvisí s naším výkladem, pochází z roku 1947 od von Neumanna a Ulama .

Příklad 3.1.8 (Obrázek 6) Dynamické systémy $([0, 1], T)$ a $([0, 1], S)$, kde T je stanové zobrazení a S je tzv. logistické zobrazení, $Sx = 4x(1 - x)$, $x \in [0, 1]$, jsou topologicky konjugované - viz Poznámku 1.0.3. Lze snadno ověřit, že homeomorfismem splňujícím vztah $h \circ T = S \circ h$ na $[0, 1]$ je zobrazení

$$h(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Speciálně je tedy dynamický systém $([0, 1], S)$ tranzitivní - viz Poznámku 3.1.7.

¹tato definice je platná pro obecný kompaktní metrický prostor X



Obrázek 6. Topologicky konjugované dynamické systémy.

Pozorování z Příkladu 3.1.8, objevené von Neumannem a Ulamem, je, jak se v roce 1966 ukázalo, speciálním případem zajímavého výsledku, jehož autorem je Parry.

Věta 3.1.9 [34] *Je-li $([0, 1], T)$ po částech monotonní tranzitivní dynamický systém, je tento topologicky konjugovaný s dynamickým systémem $([0, 1], S)$, kde zobrazení S má konstantní sklon $e^{h_{\text{top}}(T)}$.*

Pro úplnost uvedme také Blokhův dolní odhad topologické entropie tranzitivního dynamického systému $([0, 1], T)$.

Věta 3.1.10 [6] *Je-li $([0, 1], T)$ tranzitivní dynamický systém, pak*

$$h_{\text{top}}(T) \geq (1/2) \log 2.$$

Shrnutí výsledků 3.1.11 *Buď $([0, 1], T)$ po částech monotonní po částech C^2 tranzitivní dynamický systém. Buď λ Lebesgueova míra na $[0, 1]$ a $\tilde{\mu}$ absolutně spojitá (vzhledem k λ) invariantní míra. V dalším shrnujeme výsledky, které se vztahují k uvedenému dynamickému systému:*

- (i) *Je-li $\inf |T'| > 1$, pak existuje míra $\tilde{\mu}$ [23], tato míra je jediná, ergodická a s kladnou hustotou λ -s.v. [25].*
- (ii) *Topologická entropie T je kladná [6].*
- (iii) *Zobrazení T je konjugované se zobrazením s konstantním sklonem [34].*
- (iv) *Pro každou ergodickou invariantní míru μ platí $h_\mu \leq \int_{[0,1]} \log |T'| d\mu$ [39], [31].*
- (v) *Platí $h_{\text{top}}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log V(T^n)$ [29].*

- (vi) Má-li T konstantní sklon m , pak $|T'|$ je po částech monotonní a protože dimenze míry $\tilde{\mu}$ je 1, platí $h_{\tilde{\mu}}(T) = \int_{[0,1]} \log |T'| d\tilde{\mu} = \log m$. Z druhé strany jest $h_{\text{top}}(T) = \log m$, a proto míra $\tilde{\mu}$ má maximální entropii [24].

K následujícím tvrzením postačí předpoklad, že $([0, 1], T)$ je po částech C^1 :

- (vii) Pro $m > 1$, je-li $|T'| \leq m$ a na podintervalu $J \subset [0, 1]$ platí $|T'| < m$, pak $h_{\text{top}}(T) < \log m$ [36].
- (viii) Pro $m > 1$, je-li $|T'| \geq m$ a na podintervalu $J \subset [0, 1]$ platí $|T'| > m$, pak $h_{\text{top}}(T) > \log m$ [36].

3.2. Spočetně po částech monotonní zobrazení

V úvodu připomeňme potřebné definice z předcházejícího odstavce. Intervalem *vlastnosti* \mathcal{V} (monotonie, diferencovatelnosti, apod.) zobrazení T rozumíme jakýkoliv uzavřený podinterval $I \subset [0, 1]$, pro který má zúžení $T|I$ vlastnost \mathcal{V} .

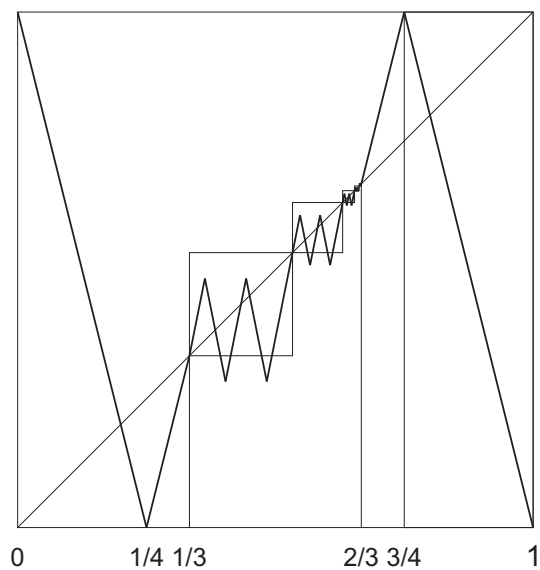
Definice 3.2.1 Řekneme, že zobrazení T je spočetně po částech *vlastnosti* \mathcal{V} , jestliže lze $[0, 1]$ vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha intervalů *vlastnosti* \mathcal{V} zobrazení T .

Jak jsme se již zmínili v úvodu této kapitoly, naším cílem je srovnání vybraných vlastností po částech monotonních, resp. spočetně po částech monotonních zobrazení. V každém případě lze konstatovat, že soustavný výzkum spočetně po částech monotonních zobrazení se nachází na počátku. V dalším uvádíme nejdůležitější doposud známé výsledky.

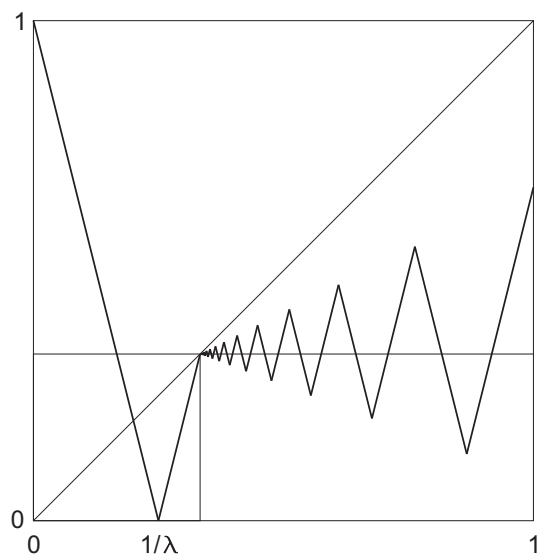
Věta 3.2.2 [32] (Obrázek 7) *Existuje dynamický systém $([0, 1], T)$ s vlastnostmi:*

- (i) $([0, 1], T)$ je spočetně po částech afinní,
- (ii) $|T'x| \leq 5$ ve všech bodech $x \in (0, 1)$ s výjimkou bodů obrátu²,
- (iii) T je tranzitivní; navíc platí, že pro každou neprázdnou otevřenou množinu $U \subset [0, 1]$ existuje n přirozené takové, že $T^n(U) = [0, 1]$,
- (iv) $|T'x| = 4$ pro $x \in (0, 1/3) \cup (2/3, 1)$ a $|T'x| = 5$ pro $x \in (1/3, 2/3)$
- (v) $h_{\text{top}}(T) = \log 5$.

²body, v nichž má zobrazení lokální extrém



Obrázek 7. Zobrazení T .



Obrázek 8. Zobrazení S .

Věta 3.2.3 [32] (Obrázek 8) *Pro každé $\lambda > 2$ a každé $\alpha > \log 2$ existuje dynamický systém $([0, 1], S)$ s vlastnostmi:*

- (i) $([0, 1], S)$ je spočetně po částech afinní,
- (ii) $|S'x| = \lambda$ ve všech bodech $x \in (0, 1)$ s výjimkou bodů obratu,

- (iii) S je tranzitivní; navíc platí, že pro každou neprázdnou otevřenou množinu $U \subset [0, 1]$ existuje n přirozené takové, že $S^n(U) = [0, 1]$,
- (iv) $h_{\text{top}}(S) \leq \alpha$.
- (v) Pro každou ergodickou S -invariantní borelovskou pravděpodobnostní míru má rozklad do úseků zobrazení S konečnou entropii.

V dalším uvádíme nedávné zobecnění Věty 3.1.9 pro spočetně po částech monotonní zobrazení. K přesné formulaci jsou nezbytné následující definice.

Definice 3.2.4 Dynamický systém $([0, 1], T)$ patří do třídy \mathcal{A} , jestliže:

- existuje dvojice (P, φ) taková, že $P \subset [0, 1]$ je spočetná, uzavřená, obsahující body $0, 1$,
- zobrazení $\varphi: P \rightarrow P$ je spojitě
- T je monotonní na každém P -intervalu³,
- $T|_P = \varphi$,
- existuje $L > 0$ takové, že pro každé $y \in [0, 1]$ platí $\text{card } T^{-1}(y) < L$.

Pro dynamický systém $([0, 1], T) \in \mathcal{A}$ daný dvojicí (P, φ) definujeme matici $M(T)$ indexovanou P -intervaly: prvek $m_{J,K}$ matice $M(T)$ je roven 1, jestliže $TJ \supset K$, a 0 jinak.

Poznámka 3.2.5 Lze ukázat, že pro $([0, 1], T) \in \mathcal{A}$ matice $M(T)$ reprezentuje jistý spojitý lineární operátor \mathbb{M} na prostoru ℓ_P^1 všech absolutně konvergentních posloupností indexovaných P -intervaly; tuto skutečnost stručně zapisujeme $M(T) \sim \mathbb{M}$ na ℓ_P^1 .

Označme \mathcal{K}_P^+ kužel všech nezáporných posloupností v prostoru ℓ_P^1 .

Definice 3.2.6 Buď $([0, 1], T) \in \mathcal{A}$ daný dvojicí (P, φ) . Řekneme, že limitní body množiny P slabě ovlivňují topologickou entropii, jestliže existuje k přirozené takové, že $M^k(T)$ lze vyjádřit ve tvaru součtu matic $C_k + B_k$, kde

- $C_k \sim \mathbb{C}$, $B_k \sim \mathbb{B}$ na ℓ_P^1 a operátory \mathbb{C} , \mathbb{B} zachovávají kužel \mathcal{K}_P^+ ,
- \mathbb{C} je kompaktní,
- $M(T) \sim \mathbb{M}$ na ℓ_P^1 a $r(\mathbb{M}^k) > \|\mathbb{B}\|$.

Věta 3.2.7 [13] *Buď $([0, 1], T) \in \mathcal{A}$ daný dvojicí (P, φ) . Je-li $([0, 1], T)$ tranzitivní a limitní body množiny P slabě ovlivňují topologickou entropii, pak $r(\mathbb{M}) \geq e^{h_{\text{top}}(T)}$ a dynamický systém $([0, 1], T)$ je topologicky konjugovaný s dynamickým systémem $([0, 1], S)$, kde zobrazení S má konstantní sklon $r(\mathbb{M})$.*

³ (a, b) je P -interval, jestliže $a, b \in P$ a $(a, b) \cap P = \emptyset$

3.3. Otázky řešené v článku “On piecewise affine interval maps with countably many laps”

Základním předmětem výzkumu je otázka, které vlastnosti Shrnutí 3.1.11 (ne)zůstávají v platnosti pro spočetně po částech monotonní dynamický systém. Zachováme-li strukturu zmiňovaného odstavce, lze konstatovat:

Shrnutí výsledků 3.3.1 Bud' $([0, 1], T)$ spočetně po částech monotonní tranzitivní dynamický systém.

- (i) Existence/počet absolutně spojitých invariantních měr zůstává otevřeným problémem.
- (ii) Topologická entropie T je kladná [6].
- (iii) Zobrazení T je konjugované se zobrazením s konstantním sklonem - částečně vyřešeno [13].
- (iv) Pro každou ergodickou invariantní míru μ platí $h_\mu \leq \int_{[0,1]} \log |T'| d\mu$ - částečně vyřešeno [13].
- (v) Platí $h_{\text{top}}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log V(T^n)$ - neplatí [32],[14].
- (vi) Má-li T konstantní sklon m , pak $|T'|$ je počástech monotonní a protože dimenze míry $\tilde{\mu}$ je 1, platí $h_{\tilde{\mu}}(T) = \int_{[0,1]} \log |T'| d\tilde{\mu} = \log m$. Z druhé strany jest $h_{\text{top}}(T) = \log m$, a proto míra $\tilde{\mu}$ má maximální entropii - neplatí [32],[14].
- (vii) Pro $m > 1$, je-li $|T'| \leq m$ a na podintervalu $J \subset [0, 1]$ platí $|T'| < m$, pak $h_{\text{top}}(T) < \log m$ - neplatí [32],[14].
- (viii) Pro $m > 1$, je-li $|T'| \geq m$ a na podintervalu $J \subset [0, 1]$ platí $|T'| > m$, pak $h_{\text{top}}(T) > \log m$ - zůstává otevřeným problémem.

3.3.1. Hlavní výsledky v článku “On piecewise affine interval maps with countably many laps”

Věta 3.4.5-6 *Existují spočetně po částech monotonní tranzitivní dynamické systémy $([0, 1], T_\alpha)$, $\alpha \geq 9$, takové, že:*

- (i) $([0, 1], T_\alpha)$, $([0, 1], T_\beta)$ jsou topologicky konjugované pro každou dvojici $\alpha, \beta \geq 9$
- (ii) $h_{\text{top}}(T_\alpha) = \log 9$ pro každé $\alpha \geq 9$,
- (iii) zobrazení T_α má konstantní sklon α pro každé $\alpha \geq 9$.

Uzlovým bodem zobrazení $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ míníme bod, pro který $D^+T(x) = D^-T(x) = \infty$ a $D_+T(x) = D_-T(x) = -\infty$.

Věta 3.4.11 *Třída \mathcal{F} obsahuje zobrazení T s vlastnostmi:*

- (i) T zachovává Lebesgueovu míru,
- (ii) $h_{\text{top}}(T) = \log 9$.
- (iii) T má uzlový bod v $1/2$.

3.4. On piecewise affine interval maps with countably many laps - úplná verze článku

3.4.1. Introduction, main results

In their interesting article [32] the authors showed, among other results, that laws ruling piecewise monotone interval maps do not work when we admit countably many pieces of monotonicity. They showed

Theorem 3.4.1 [32] *For $\lambda > 2$ and every $\alpha > \log 2$ there exists a continuous map $T_\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ with the following properties:*

- (i) *f has countably many turning points.*
- (ii) *f is locally eventually onto (leo).*
- (iii) *$|T'_\lambda(x)| = \lambda$ for all $x \in (0, 1)$, except at the turning points of T .*
- (iv) *$h_{\text{top}}(T_\lambda) \leq \alpha$.*
- (v) *For every ergodic T_λ -invariant Borel probability measure the partition into the laps of T_λ has finite entropy.*

That is, for piecewise affine interval leo maps with countably many pieces of monotonicity and a constant slope $\pm\lambda$, the topological (measure-theoretical) entropy is not given by λ .

In Section 5 of the same work they also gave an example of a continuous (not piecewise monotone) locally eventually onto map satisfying

$$\sup_{x \in [0,1]} |T'(x)| \leq r, \quad \sup_{x \in I} |T'(x)| < r$$

for some interval $I \subset [0, 1]$, but $h_{\text{top}}(T) = \log r$.

In this paper we provide one specific completion of the results cited above (we do not discuss the item (v) of Theorem 3.4.1). We show, roughly speaking, that all maps under consideration can be taken from one conjugacy class (with common entropy value $\log 9$) containing an “optimal representative”, i.e., the map f such that $|f'(x)| = 9$ for all $x \in (0, 1)$, except at the turning points of f .

As a by-product of our construction we show that there is an element of our conjugacy class preserving the Lebesgue measure and having a knot point (a point x where $D^+f(x) = D^-f(x) = \infty$ and $D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty$) in its fixed point $1/2$.

3.4.2. Definition of class \mathcal{F}

In what follows we introduce a conjugacy class \mathcal{F} . Later on, this class will be used to demonstrate several interesting features of piecewise monotone maps with countably many laps.

We will call a pair of real increasing sequences $V = \{v_i\}_{i \geq -1}$, $X = \{x_i\}_{i \geq 0}$ of points from $(0, 1/2)$ admissible if

- V, X converge to $1/2$
- $0 = v_{-1} = x_0 = v_0 < x_1 < v_1 < x_2 < v_2 < x_3 < v_3 < \dots$.

Using admissible sequences V, X we define a continuous map

$$f = f(V, X) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

by (see Figure 9)

- (a) $f(v_{2i-1}) = 1 - v_{2i-1}$, $i \geq 1$, $f(v_{2i}) = v_{2i}$, $i \geq 0$,
- (b) $f(x_{2i-1}) = 1 - v_{2i-3}$, $i \geq 1$, $f(x_{2i}) = v_{2i-2}$, $i \geq 1$,
- (c) $f_{u,v} = \left| \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \right| > 1$ for each interval $[u, v] \subset [x_i, x_{i+1}]$,
- (d) $f(1/2) = 1/2$ and $f(t) = f(1 - t)$ for each $t \in [1/2, 1]$.

The property (c) can be satisfied since for admissible V, X by (a),(b), $f_{x_i, x_{i+1}} > 2$ for each $i \geq 0$.

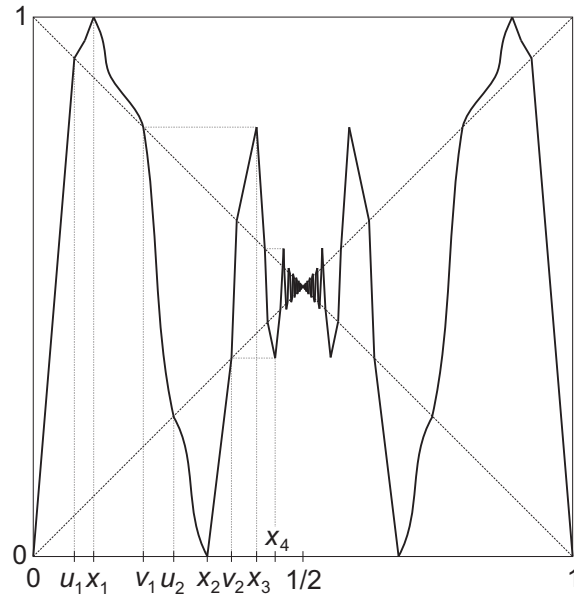


Figure 9. A map from the class \mathcal{F} .

We denote by $\mathcal{F}(V, X)$ the set of all continuous interval maps fulfilling (a)-(d) for a fixed admissible pair V, X . Finally, we put

$$\mathcal{F} := \bigcup_{V, X \text{ admissible}} \mathcal{F}(V, X).$$

Proposition 3.4.2 *Each $f \in \mathcal{F}$ is locally eventually onto, i.e., for every nonempty open set $U \subset [0, 1]$ there is an $n \in \mathbb{N}$ such that $f^n(U) = [0, 1]$.*

Proof. Let $f \in \mathcal{F}$. The points $v_{2i}, f(x_{2i+1}), i \geq 1$, resp. $1 - v_{2i-1}, f(1 - x_{2i}), i \geq 1$ are fixed and by (a)-(d)

$$f^{2i+1}([v_{2i}, x_{2i+1}]) = f^{2i}([1 - x_{2i}, 1 - v_{2i-1}]) = [0, 1]$$

for $i \geq 1$ and $f([0, x_1]) = [0, 1]$. Let U be a nonempty open set in $[0, 1]$. From the property (c) follows that there is n_0 such that either $f^{n_0}(U) \supset [v_{2i}, x_{2i+1}]$ or $f^{n_0}(U) \supset [1 - x_{2i}, 1 - v_{2i-1}]$ for some $i \geq 1$. Thus $f^{n_0+2i+1}(U) = [0, 1]$. \square

Let $f \in \mathcal{F}$. For $i \geq 1$ denote u_{2i-1} , resp. u_{2i} the unique solution (because of (c)) of the equation

$$(3.1) \quad f(x) = 1 - x, \quad x \in (x_{2i-2}, x_{2i-1}), \quad \text{resp.} \quad f(x) = x, \quad x \in (x_{2i-1}, x_{2i}).$$

Put $U = \{u_i\}_{i \geq 1}$. For a subset $Y \subset [0, 1]$ its symmetric extension $Y \cup (1 - Y)$ is denoted by $s(Y)$. Let

$$(3.2) \quad D(U, V) := s(U) \cup s(V) \cup \{0, 1\}.$$

An open interval (a, b) with $a, b \in D$ and $(a, b) \cap D = \emptyset$ will be called D -basic (for f).

For two maps $f, \tilde{f} \in \mathcal{F}$ and sets $D(U, V), X$ and $D(\tilde{U}, \tilde{V}), \tilde{X}$ there exists the unique increasing bijection

$$(3.3) \quad \pi: D(U, V) \cup s(X) \rightarrow D(\tilde{U}, \tilde{V}) \cup s(\tilde{X}).$$

Two basic intervals (a, b) and $(\pi(a), \pi(b))$, resp. two points t and $\pi(t)$ will be then called *corresponding*.

3.4.3. \mathcal{F} is a conjugacy class

As we have already announced in Introduction, in Theorem 3.4.5 of this section we prove that any two elements of the class \mathcal{F} are topologically conjugated.

Definition 3.4.3 Fix $f(V, X) \in \mathcal{F}$ and $D = D(U, V)$, let \mathcal{J} denote the set of all D -basic intervals. An interval $K \in \mathcal{J}$ is in preimage $\mathcal{P}(J)$ of an interval $J \in \mathcal{J}$ if $I = I(J, K) = f^{-1}(J) \cap K \neq \emptyset$. If I consists of one

connected component that is a subset of an interval of monotony (x_i, x_{i+1}) of f , then K will be called *increasing*, resp. *decreasing* for $\mathcal{P}(J)$ in accordance with the type of monotony of $f|I$. Otherwise, if I consists of two connected components that are subsets of interval of monotony $(x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i+1})$ of f , then K will be called *nonmonotone* for $\mathcal{P}(J)$.

One can see that by our construction

$$(3.4) \quad (\forall f \in \mathcal{F})(\forall t \in [0, 1] \setminus \{1/2\}): 1 \leq \#f^{-1}(t) < \infty.$$

In what follows, for $f \in \mathcal{F}$ we will need the complete backward orbit $\mathcal{O}(f, t)$ of a point $t \in [0, 1] \setminus (\{1/2\} \cup D(U, V))$. Since $f(D(U, V)) \subset D(U, V)$ we get $\mathcal{O}(f, t) \cap D(U, V) = \emptyset$. For $i_0 = 1$ we formally put $t = t(i_0) \in f^{-0}(\{t\})$ and

$$(3.5) \quad \mathcal{O}(f, t) = \{t(i_0, i_1, \dots, i_n)\}_{n \geq 0},$$

where $t(i_0, i_1, \dots, i_n) \in f^{-n}(\{t\})$ satisfies

$$(3.6) \quad f(t(i_0, i_1, \dots, i_n)) = t(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}), \quad n \geq 1;$$

if $k = \#f^{-1}(\{t(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})\})$ then

$$t(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, 1) < t(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, 2) < \dots < t(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, k).$$

By $J(t) \in \mathcal{J}$ we denote the D -basic interval that contains a point t .

Lemma 3.4.4 *Let $f, \tilde{f} \in \mathcal{F}$. The following is true.*

- (i) *If D -basic intervals J, \tilde{J} , resp. $K \in \mathcal{P}(J), \tilde{K} \in \mathcal{P}(\tilde{J})$ are corresponding then K is increasing, resp. decreasing for $\mathcal{P}(J)$ if and only if \tilde{K} is increasing, resp. decreasing for $\mathcal{P}(\tilde{J})$.*
- (ii) *For every $J \in \mathcal{J}$ and corresponding $\tilde{J} \in \tilde{\mathcal{J}}$, the preimages $\mathcal{P}(J), \mathcal{P}(\tilde{J})$ contain corresponding intervals.*
- (iii) *For every $J \in \mathcal{J}$, the preimage $\mathcal{P}(J)$ contains either 0 or 2 nonmonotone D -basic intervals.*
- (iv) *For any two corresponding intervals J, \tilde{J} and points $t \in J, \tilde{t} \in \tilde{J}$ and $t_m = t(i_0, i_1, \dots, i_m), \tilde{t}_m = \tilde{t}(i_0, i_1, \dots, i_m)$, the intervals*

$$J(t_m), \tilde{J}(\tilde{t}_m)$$

are corresponding.

- (v) *For every points $u, v \in s(X)$ and corresponding $\tilde{u}, \tilde{v} \in s(\tilde{X})$, $\text{sgn}(u_m - v_n) = \text{sgn}(\tilde{u}_m - \tilde{v}_n)$.*

Proof. The properties (i), (ii) directly follow from the definition of functions f, \tilde{f} and the corresponding intervals.

(iii) There are no nonmonotone D -basic intervals in $\mathcal{P}(J)$ for any J of type $(u, v), (1-v, 1-u)$. All other types $(0, u), (1-u, 1), (v, u), (1-u, 1-v)$ have 2 nonmonotone D -basic intervals in their preimage.

(iv) Number from the left to the right all intervals $K_1, K_2, \dots, K_k \in \mathcal{J}$ that are in preimage $\mathcal{P}(J)$ of J , i.e. $\mathcal{P}(J) = \{K_1 < K_2 < \dots < K_k\}$. Using (iii) assume that $\ell \in \{0, 2\}$ of them are nonmonotone. Then for every $t \in J$ we have

$$f^{-1}(\{t\}) = \{t_1 < t_2 < \dots < t_{k+\ell}\},$$

where each monotone K , resp. nonmonotone K corresponds to one $t_i \in K$, resp. to two consequent $t_i, t_{i+1} \in K$ with $(t_i, t_{i+1}) \cap s(X) = \{x\}$. Thus, the coordinate $i_1 \in \{1, 2, \dots, k + \ell\}$ of $t(i_0, i_1)$ uniquely determines an interval K from $\mathcal{P}(J)$ with $t(i_0, i_1) \in K$ and, if K is nonmonotone, also the position of $t(i_0, i_1)$ with respect to $\{x\} = s(X) \cap K$. Using this fact repeatedly for f, t , resp. \tilde{f}, \tilde{t} , we get the conclusion.

Let us show (v). We will proceed by induction.

Arguing as in (iv) we can see that the conclusion is correct when $m = 0$ (or by the symmetry, $n = 0$), since then $u_0 \in s(X)$ and $\tilde{u}_0 \in s(\tilde{X})$ is corresponding.

Let $m, n \geq 1$ and $m \geq n$, consider points $u_m = u(i_0, \dots, i_m)$, $\tilde{u}_m = \tilde{u}(i_0, \dots, i_m)$, $v_n = v(j_0, \dots, j_n)$, $\tilde{v}_n = \tilde{v}(j_0, \dots, j_n)$.

Assume that for some $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ the equality

$$(3.7) \quad \text{sgn}(u_{m-k} - v_{n-k}) = \text{sgn}(\tilde{u}_{m-k} - \tilde{v}_{n-k})$$

holds true. By (iv), if $J(u_{m-k+1}) \neq J(v_{n-k+1})$ then

$$\text{sgn}(u_{m-k+1} - v_{n-k+1}) = \text{sgn}(\tilde{u}_{m-k+1} - \tilde{v}_{n-k+1}).$$

Let $K = J(u_{m-k+1}) = J(v_{n-k+1})$.

If K is monotone for $\mathcal{P}(J(u_{m-k}))$ and also for $\mathcal{P}(J(v_{n-k}))$ then by (i)–(iii) the corresponding \tilde{K} has the same type of monotony for $\mathcal{P}(\tilde{J}(\tilde{u}_{m-k}))$ and $\mathcal{P}(\tilde{J}(\tilde{v}_{n-k}))$, hence we get $\text{sgn}(u_{m-k+1} - v_{n-k+1}) = \text{sgn}(\tilde{u}_{m-k+1} - \tilde{v}_{n-k+1})$.

If K is nonmonotone for $\mathcal{P}(J(u_{m-k}))$, resp. $\mathcal{P}(J(v_{n-k}))$ (K can be nonmonotone for one of them only), the last coordinates i_{m-k+1}, j_{n-k+1} determine the effective connected components of $f^{-1}(J(u_{m-k})) \cap K$ (containing u_{m-k+1}), resp. $f^{-1}(J(v_{n-k})) \cap K$ (containing v_{n-k+1}) and for f the order of effective component is the same. Thus,

$$\text{sgn}(u_{m-k+1} - v_{n-k+1}) = \text{sgn}(\tilde{u}_{m-k+1} - \tilde{v}_{n-k+1}).$$

Since we have shown at the beginning of this part that a

$$k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

satisfying (3.7) has to exist, our proof is finished. \square

Theorem 3.4.5 *The set \mathcal{F} is a conjugacy class, i.e., for any two functions $f, \tilde{f} \in \mathcal{F}$ there exists a homeomorphism H of the unit interval such that $f = H^{-1} \circ \tilde{f} \circ H$.*

Proof. Put

$$\mathcal{O}(f) = \bigcup_{x \in s(X)} \mathcal{O}(f, x).$$

From Proposition 3.4.2 follows that both the sets $\mathcal{O}(f), \mathcal{O}(\tilde{f})$ are dense in $[0, 1]$. Moreover, using Lemma 3.4.4 (v) we get that there is an increasing bijection $h : \mathcal{O}(f) \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{f})$ coinciding with the π from (3.3) on the set $s(X)$ and defined by $h(x(i_0, i_1, \dots, i_n)) = \tilde{x}(i_0, i_1, \dots, i_n)$ for $x(i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{O}(f)$. Since by the property (b) the f, \tilde{f} images of corresponding points from $s(X), s(\tilde{X})$ are corresponding and (3.6) holds true, we get for each $x \in \mathcal{O}(f)$,

$$(h \circ f)(x) = (\tilde{f} \circ h)(x).$$

Finally, we know that both the sets $\mathcal{O}(f), \mathcal{O}(\tilde{f})$ are dense in $[0, 1]$. In such a case h can be (uniquely) extended to the homeomorphism H of the unit interval such that $f = H^{-1} \circ \tilde{f} \circ H$.

3.4.4. Maps with constant slope in \mathcal{F}

In this section we will check if the class \mathcal{F} contains piecewise affine maps with constant slopes, i.e., to a given $\lambda > 1$ a map $f = f_\lambda$ such that $|f'_\lambda(x)| = \lambda$ for all $x \in (0, 1)$, except at the turning points of f_λ (clearly, if it exists, then it is unique). The reader can easily verify by standard computation that such a map f_λ would be uniquely determined by a sequence $V = \{v_i\}_{i \geq 1}$ fulfilling the two-dimensional difference equation

$$(3.8) \quad \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\lambda-1} & 1 \\ \frac{-2}{\lambda-1} & \frac{\lambda-3}{\lambda-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-1} \\ \frac{2}{\lambda-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1,$$

with the initial condition $(v_1, v_2) = (\frac{1}{\lambda-1}, \frac{2}{\lambda-1})$.

Proposition 3.4.6 *The map f_λ exists if and only if $\lambda \geq 9$.*

Proof. By our construction we are interested in increasing solutions $\{w_n = (v_{2n-1}, v_{2n})\}_{n \geq 1}$ of (3.8) ($w_{n+1} > w_n$ for each $n \in \mathbb{N}$) and such that $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = (1/2, 1/2)$.

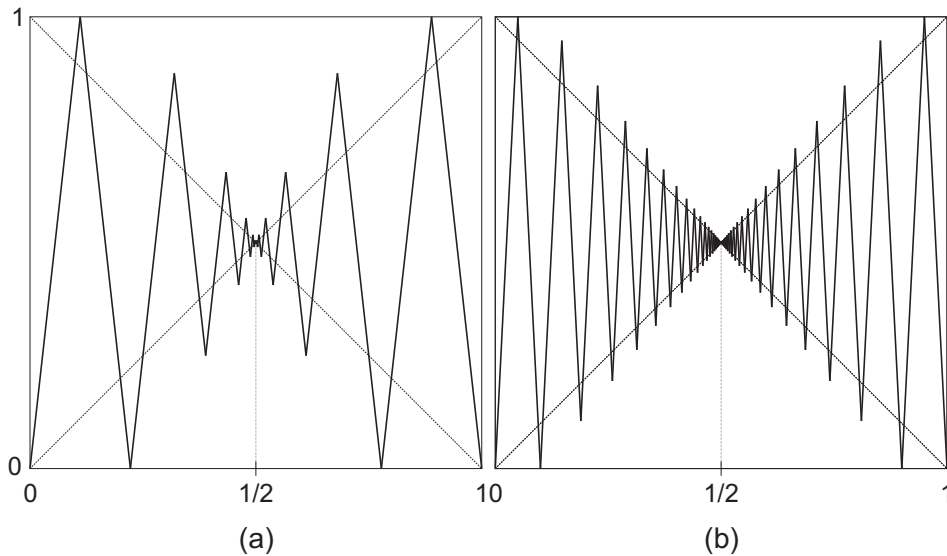


Figure 10. (a) The map f_9 ; (b) The map f_{20} .

Denote by $A(\lambda)$ the matrix from the equation (3.8).

Direct computations show that:

- An increasing solution of (3.8) that converges to the $(1/2, 1/2)$ exists if and only if $\lambda \geq 9$ and it is if and only if all eigenvalues of $A(\lambda)$ are real positive.
- For $\lambda = 9$ the matrix $A(9)$ has the unique eigenvalue $1/4$ of multiplicity two; the solution of (3.8) is then given by the explicit formula

$$(3.9) \quad (v_{2n-1}, v_{2n}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{4n+2}{4^{n+1}}, \frac{1}{2} - \frac{2n+2}{4^{n+1}} \right), \quad n \geq 2,$$

as one can easily check substituting (3.9) into (3.8). \square

Since the topological entropy is a conjugacy invariant (see [43]) and Theorem 3.4.5 holds true, we can speak about entropy value $h_{\text{top}}(\mathcal{F})$ of the class \mathcal{F} . We know that $f_9 \in \mathcal{F}$ and f_9 is 9-Lipschitz hence by [21, Theorem 3.2.9], $h_{\text{top}}(\mathcal{F}) \leq \log 9$. In order to show that it equals to $\log 9$ we will use standard tools developed for interval maps.

Let $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be a continuous interval map, and $Q = \{q_1 < q_2 < \dots < q_n\}$ be a finite subset of $[0, 1]$ (Q need not be f -invariant). The matrix of Q (with respect to f) is the $(n-1) \times (n-1)$ matrix \mathcal{A}_Q , indexed by Q -basic intervals and defined by \mathcal{A}_{JK} is the largest non-negative integer l such that there are l subintervals J_1, \dots, J_l of J with pairwise disjoint interiors such that $f(J_i) = K$, $i = 1, 2, \dots, l$. An interval map $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is called transitive if for some point $x \in [0, 1]$ its orbit is dense in $[0, 1]$.

The following lemma is needed in the proof of Theorem 3.4.9.

Lemma 3.4.7 [17] *Let $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be transitive, Q be a finite subset of the ambient interval, and let \mathcal{A}_Q be the matrix of Q with respect to f . Then $h_{\text{top}}(f) \geq \log \mathbf{r}(\mathcal{A}_Q)$, with equality if Q is f -invariant and contains the endpoints of the ambient interval, and f is monotone (but not necessarily strictly monotone) on each Q -basic interval.*

One of well-known results from one-dimensional dynamics is the following.

Theorem 3.4.8 [34],[33] *Any continuous, transitive, piecewise monotone map $G: [a, b] \rightarrow [a, b]$ is topologically conjugate to a piecewise affine map $\pi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ which has slope $\pm\beta$ ($\log \beta$ is the topological entropy of G) on each affine piece.*

Theorem 3.4.9 *The entropy value $h_{\text{top}}(\mathcal{F})$ is equal to $\log 9$.*

Proof. By the previous, $h_{\text{top}}(f_9) = h_{\text{top}}(\mathcal{F}) \leq \log 9$. In what follows we will use Lemma 3.4.7 and Theorem 3.4.8 to show that even $h_{\text{top}}(f_9) = h_{\text{top}}(\mathcal{F}) = \log 9$.

Let us formally denote $A_n = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Using two admissible sequences V, X (introduced in Section 3.4.2) corresponding to the map f_9 , put for $k \in \mathbb{N}$

$$Q_k = s(X_{2k} \cup V_{2k-1}) \cup \{1 - x_{2k+1}\}, \quad g_k = f_9|_{Q_k},$$

where as before, $s(Y)$ denotes the symmetric extension $Y \cup (1 - Y)$ of Y . Let G_k be “connect-the-dots” map given by the pair (Q_k, g_k) . One can use a similar way as in Proposition 3.4.2 to show that G_k is locally eventually onto hence also transitive. Since the set Q_k is G_k -invariant and G_k is affine on each Q_k -basic interval, Lemma 3.4.7 applies. From that lemma we get

$$(3.10) \quad \log \mathbf{r}(\mathcal{A}_{Q_k}) = h_{\text{top}}(G_k) \leq h_{\text{top}}(f_9) = \log \beta;$$

the topological entropy is lower semicontinuous on the space of all continuous interval maps equipped with the supremum norm (see [27]) and $f_9 = \lim_k G_k$. This fact together with (3.10) imply

$$(3.11) \quad \lim_k h_{\text{top}}(G_k) = \log \beta.$$

Let α_k be a map guaranteed by Theorem 3.4.8, i.e., a piecewise affine map from $[0, 1]$ into itself which has slope $\pm e^{h_{\text{top}}(G_k)}$ on each affine piece. From above we know that $\lim_k e^{h_{\text{top}}(G_k)} = e^{h_{\text{top}}(f_9)} = \beta \leq 9$; by our definitions of α'_k s and the class \mathcal{F} ,

$$\lim_k \alpha_k = f_\beta \in \mathcal{F},$$

where f_β is piecewise affine which has slope $\pm\beta$. Using Proposition 3.4.6 we get $\beta = 9$, i.e., $h_{\text{top}}(f_9) = \log 9 = h_{\text{top}}(\mathcal{F})$. \square

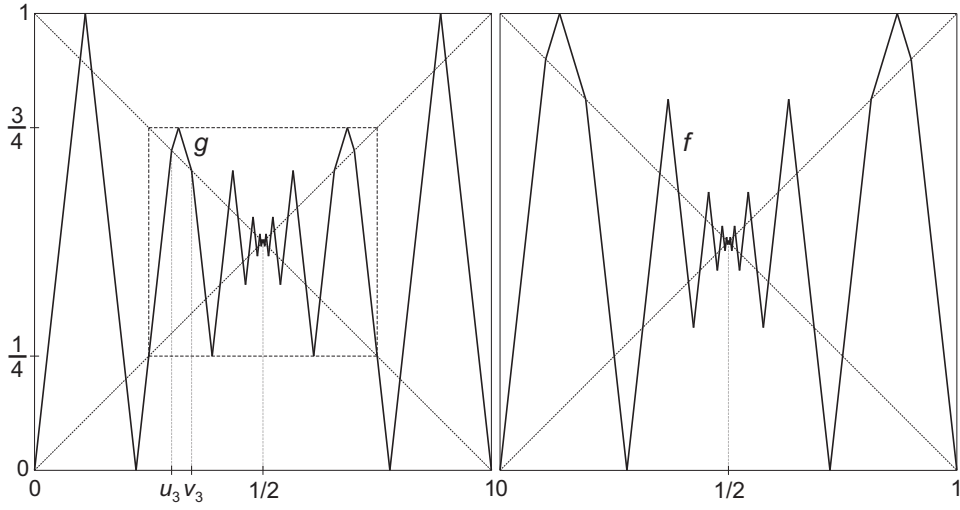


Figure 11. The maps g and f .

Theorem 3.4.10 *There is a map $f \in \mathcal{F}$ and a union of two intervals $I \subset (0, 1)$ such that if $f'(x)$ exists then either $|f'_\lambda(x)| = 9$ when $x \notin I$ or $|f'_\lambda(x)| = 23/7$ for $x \in I$.*

Proof. To the map f_9 correspond the sequences V and U introduced in Section 3.4.2. In particular, from (3.8),(3.9) we get $u_3 = 3/10$ and $v_3 = 11/32$. Define a continuous map $g: [1/4, 3/4] \rightarrow [1/4, 3/4]$ by

$$(3.12) \quad g(x) = \begin{cases} f_9(x), & x \in [1/4, 1/2] \setminus (u_3, v_3), \\ 3/4, & x = 29/92, \\ \text{affine on laps } [u_3, 29/92], [29/92, v_3], \\ g(1-x), & x \in [1/2, 3/4]. \end{cases}$$

Put $f = r^{-1} \circ g \circ r$, where r is affine, preserves orientation and maps the unit interval onto $[1/4, 3/4]$ - see Figure 11. The reader can verify by direct computations that f and $I = r^{-1}(s([u_3, v_3]))$ satisfy the conclusion. \square

3.4.5. Maps preserving the Lebesgue measure in \mathcal{F}

The class \mathcal{F} contains also maps preserving the Lebesgue measure. One possible way how to see it follows from Figure 12. It shows a piecewise affine map with countably many laps which is uniquely determined by a sequence $\{k_i\}_{i \geq 1}$ of reals from the interval $(2, \infty)$. One can easily verify that such a map preserves the Lebesgue measure if and only if

$$(3.13) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|k_{2i-1}|} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{|k_{2j}|} + \sum_{i=1}^j \frac{1}{|k_{2i-1}|} = \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2, \dots$$

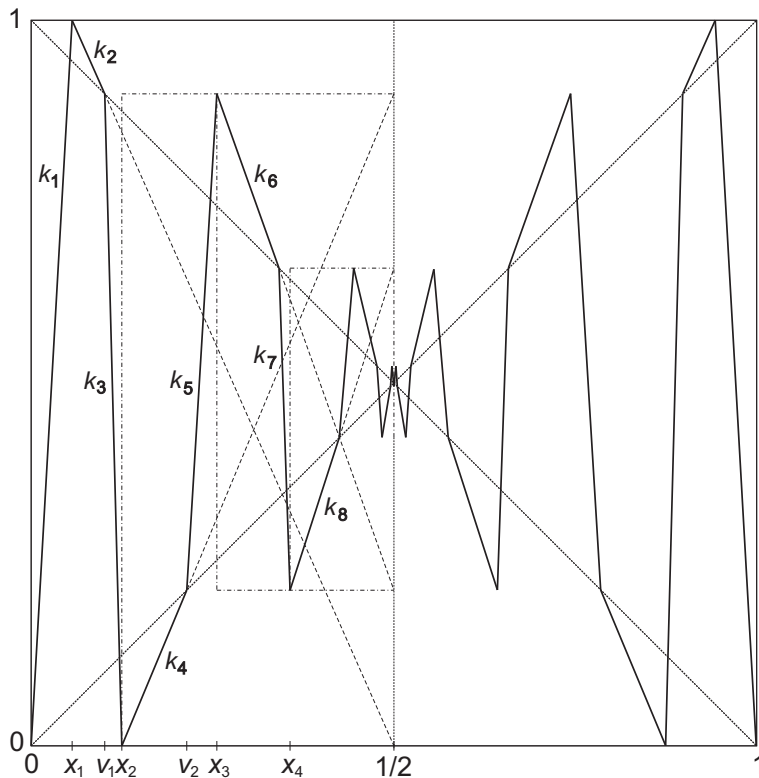


Figure 12. A map from \mathcal{F} preserving the Lebesgue measure.

We recall that by a knot point of a function f we mean a point x where $D^+f(x) = D^-f(x) = \infty$ and $D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty$. It was discussed in Section 2.4 that for the problem of understanding of relationship of two characteristics of an interval (or tree) map - its topological entropy and cardinalities of level sets - it could be useful to understand the role of knot points of Lebesgue measure preserving maps, for example, to evaluate the topological entropy of such a map having a knot point at its fixed point. The best estimate is not clear at all, but using elements of the class \mathcal{F} we obtain the following.

Proposition 3.4.11 *The class \mathcal{F} contains a map f with the following properties.*

- (i) f preserves the Lebesgue measure.
- (ii) $h_{\text{top}}(f) = \log 9$.
- (iii) f has a knot point at $1/2$.

Proof. By Theorem 3.4.9 it is sufficient to find a sequence $\{k_i\}_{i \geq 1}$ fulfilling (3.13) and (iii). Denote $f_{u,v} = \left| \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \right|$. With the help of Figure 12, we

briefly explain how to ensure

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{x_i, 1/2} = \infty,$$

which implies (iii).

Choose $k_1 > 2$ to satisfy $f_{x_1, 1/2} > 1$; then by (3.13), $k_2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{k_1})^{-1}$. One can choose $k_3 > k_2$ (but close to k_2) such that $f_{x_2, 1/2} > 2$; similarly as before, by (3.13), $k_4 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_3})^{-1}$. We choose $k_5 > k_4$ (close to k_4) such that $f_{x_3, 1/2} > 3$; if have already defined numbers k_1, \dots, k_{2n-1} , the number k_{2n} satisfies $k_{2n} = (\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_{2i-1}})^{-1}$. We can choose $k_{2n+1} > k_{2n}$ (close to k_{2n}) such that $f_{x_{n+1}, 1/2} > n + 1$; etc. \square

Apendix

I. Měrově–teoretická entropie, nebloudivé body

Definice 1 Bud' X množina a $\mathcal{B}(X)$ necht' je σ -algebra borelovských podmnožin množiny X . Bud' dále μ konečná míra na $(X, \mathcal{B}(X))$. Řekneme, že trojice $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ je *pravděpodobnostní prostor* (nebo *normalizovaný prostor s mírou*), jestliže $\mu(X) = 1$. Říkáme pak, že μ je pravděpodobnostní míra na $(X, \mathcal{B}(X))$.

Definice 2 Bud' $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ pravděpodobnostní prostor. *Rozkladem* prostoru $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ rozumíme množinu podvou disjunktních prvků $\mathcal{B}(X)$, jejichž sjednocením je X .

Definice 3 Bud' $\zeta(\mathcal{A}) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ rozklad prostoru $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$. *Entropií rozkladu* $\zeta(\mathcal{A})$ nazýváme číslo $H(\zeta(\mathcal{A})) = -\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \log \mu(A_i)$.

Definice 4 Bud' $(X_1, \mathcal{B}_1(X_1), \mu_1), (X_2, \mathcal{B}_2(X_2), \mu_2)$ pravděpodobnostní prostory. Zobrazení $T : X_1 \rightarrow X_2$ se nazývá

- (i) *měřitelné*, jestliže platí implikace : $B_2 \in \mathcal{B}_2(X_2) \Rightarrow T^{-1}B_2 \in \mathcal{B}_1(X_1)$.
- (ii) *míru zachovávající*, jestliže T je měřitelné a $\mu_1(T^{-1}B_2) = \mu_2(B_2)$ pro každé $B_2 \in \mathcal{B}_2(X_2)$.

Definice 5 (měrově–teoretická entropie) Je-li $T : X \rightarrow X$ míru zachovávající zobrazení pravděpodobnostního prostoru $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, pak

$$h_\mu(T) = \sup h(T, \zeta),$$

kde supremum se uvažuje přes všechny konečné rozklady ζ prostoru $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, se nazývá *měrově–teoretická (Kolmogorovova) entropie zobrazení T* .

Definice 6 (nebloudivý bod) Bud' (X, T) dynamický systém. Bod $x \in X$ se nazývá *nebloudivý*, jestliže pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ obsahující bod x existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $T^n U \cap U \neq \emptyset$. Množinu všech nebloudivých bodů systému (X, T) budeme značit $\Omega(T)$.

II. Topologický stupeň C^1 –zobrazení

Definice 7 Spojité zobrazení f se nazývá C^1 –zobrazení (*hladké zobrazení*), jestliže jeho derivace je také spojité zobrazení.

Definice 8 Bod q je regulární hodnotou zobrazení f , jestliže derivace ve všech bodech p množiny $f^{-1}(q)$ je různá od nuly.

Definice 9 Bud' X kompaktní orientovatelná varieta a $f : X \rightarrow X$ buď iž C^1 –zobrazení. Nechť p je regulární hodnota C^1 –zobrazení f a $f^{-1}(p) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. V každém bodě x_i představuje f lokální difeomorfismus. Je-li r počet bodů x_i , ve kterých f zachovává orientaci a s počet bodů x_i , ve kterých f mění orientaci, pak $r - s$ se nazývá *topologickým stupněm zobrazení f* .

III. Topologická entropie a variační princip

Poznámka 1 Bud' X kompaktní metrický prostor s metrikou ρ . Symbolem $\mathcal{B}(X)$ značíme, jako v předchozím odstavci, σ –algebru borelovských podmnožin prostoru X . Symbolem $\mathfrak{M}(X)$ značíme množinu všech pravděpodobnostních měr definovaných na prostoru $(X, \mathcal{B}(X))$. Prvky množiny $\mathfrak{M}(X)$ nazýváme *borelovské pravděpodobnostní (normalizované) míry na X* .

Poznámka 2 Bud' X kompaktní metrický prostor a $T : X \rightarrow X$ spojité zobrazení. Označme $\mathfrak{M}(T) = \{\mu \in \mathfrak{M}(X); \mu(T^{-1}B) = \mu B, B \in \mathcal{B}(X)\}$. Množina $\mathfrak{M}(T)$ obsahuje tedy všechny míry $\mu \in \mathfrak{M}(X)$, které zobrazení T zachovává. Prvky množiny $\mathfrak{M}(T)$ se nazývají *invariantní míry pro T* (též *T –invariantní míry*).

Základní vlastnosti 1 Uvažujme invariantní míru μ , tj. $\mu \in \mathfrak{M}(T)$. Pro míru μ pak platí

- (i) $\overline{\text{supp } \mu} = \text{supp } \mu$,
- (ii) $T \text{supp } \mu = \text{supp } \mu$.

Věta 1 (Variační princip) [43] *Bud' $T : X \rightarrow X$ spojité zobrazení kompaktního metrického prostoru X . Pak $h_{\text{top}}(T) = \sup\{h_{\mu}(T); \mu \in \mathfrak{M}(T)\}$.*

IV. Ergodická míra

Definice 10 Bud' (X, ρ) kompaktní metrický prostor a $T : X \rightarrow X$ spojité zobrazení. Množina $A \subset X$ se nazývá *T –invariantní*, jestliže $TA \subset A$.

Definice 11 (ergodická míra) Necht' $\mu \in \mathfrak{M}(T)$. Řekneme, že míra μ je *ergodická*, jestliže jedinými invariantními množinami v X jsou množiny míry nula nebo jedna. Množinu všech ergodických T -invariantních borelovských pravděpodobnostních měr na X budeme značit $\mathcal{E}(T)$.

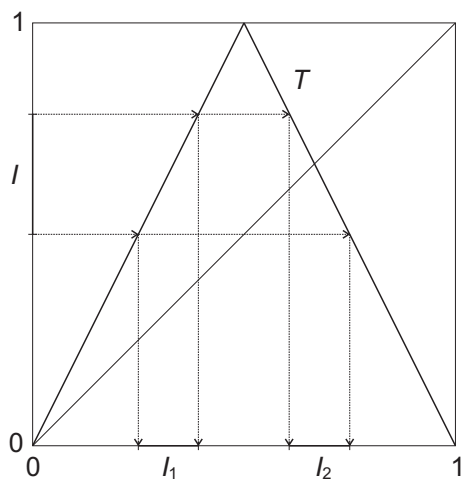
Věta 2 (Birkhoffova ergodická věta) Bud' $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ pravděp. prostor, $f \in L^1(\mu)$ a μ invariantní míra pro $T : X \rightarrow X$ (neboli T zachovává míru μ). Potom existuje $f^* \in L^1(\mu)$ tak, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f(Tx) + f(T^2x) + \dots + f(T^{n-1}x)}{n} = f^*(x)$$

pro skoro všechna $x \in X$. Navíc, je-li μ ergodická, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f(Tx) + f(T^2x) + \dots + f(T^{n-1}x)}{n} = \int_X f \, d\mu$$

pro skoro všechna $x \in X$.



Obrázek I. K invariantnosti Lebesgueovy míry pro stanové zobrazení:

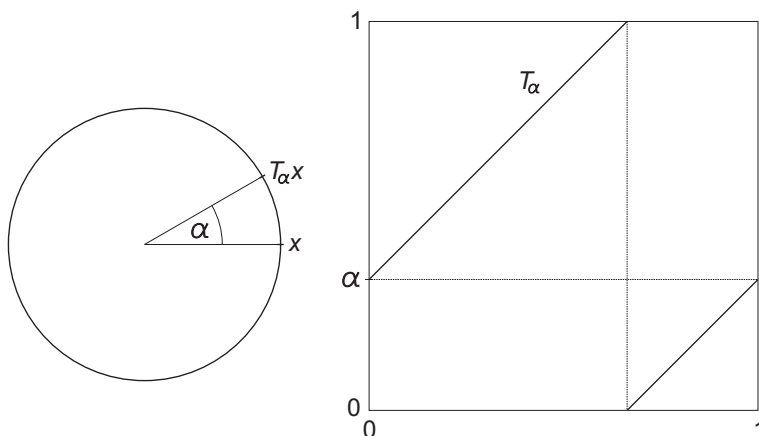
$$\lambda(I) = \lambda(I_1) + \lambda(I_2).$$

Poznámka 3 Necht' $\mu \in \mathcal{E}(T)$, $f = \chi_B$, $B \in \mathcal{B}(X)$. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_B(T^i x) = \int_X \chi_B \, d\mu = \mu(B), \quad \mu - \text{s.v.}$$

Tato rovnost říká, že střední hodnota počtu návštěv členů orbity bodu $x \in B$ v této množině B (tj. střední hodnota času stráveného v B) je rovna míře této množiny. Bod $x \in B$, pro který platí právě uvedená identita se nazývá *generický bod*.

Příklad 1 Buď $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dané předpisem $Tx = 1 - |1 - 2x|$ (tzv. stanové zobrazení - obr. I.) a λ Lebesgueova míra na $[0, 1]$. Pak lze dokázat, že $\lambda \in \mathcal{E}(T)$, tj. λ je ergodická míra pro T .



Obrázek II. Rotace na kružnici a její aditivní reprezentace.

Příklad 2 Uvažujme jednotkovou kružnici S^1 a zobrazení $T_\alpha : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ dané předpisem $T_\alpha x = x + \alpha \pmod{1}$ (jedná se o tzv. aditivní zápis rotace na kružnici - viz obr. II.). Pak lze dokázat, že Lebesgueova míra λ na S^1 je ergodická pro T právě tehdy, když $\alpha \in (0, 1)$ je iracionální.

V. Sardova věta

Definice 12 (Vnější Hausdorffova míra). Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a p nezáporné reálné číslo (dimenze). Nechť $A \subset X$. Označme

$$\mathcal{H}_p(A, \delta) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam} A_j)^p; \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset A, \text{diam} A_j \leq \delta \right\} \quad \text{pro } \delta > 0,$$

$$\mathcal{H}_p(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_p(A, \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_p(A, \delta).$$

Potom množinovou funkci $A \mapsto \mathcal{H}_p(A)$ nazveme p -dimenzionální (vnější) Hausdorffovou mírou.

Věta 3 (Sardova věta). Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená a $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nechť E je množina všech bodů $t \in G$ takových, že $f'(t)$ existuje a nechť hodnost matice $f'(t)$ je menší než k . Potom $\mathcal{H}_k(f(E)) = 0$.

VI. Seznam značení a symbolů

\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{Z}	množina celých čísel
\mathbb{R}	množina reálných čísel
C^p	třída funkcí spojitých až do p -té derivace včetně
X	množina nebo prostor
$\dim X$	dimenze X
$A \subset X$	množina A je podmnožinou X
$x \in A$	x je prvkem A
$\mathcal{B}(X)$	σ -algebra množin množiny X
μ	pravděpodobnostní míra
λ	Lebesgueova míra
$\mu(A)$	míra množiny A
$f(A), fA$	obraz množiny A při zobrazení f
$f^{-1}A$	vzor množiny A , při zobrazení f
f^n	n -tá iterace zobrazení f ($f^0 = f, f^2 = f \circ f$)
$T^n x$	n -tý obraz prvku x
$\zeta(\mathcal{A})$	rozklad prostoru
$\log 2$	logaritmus dvou při základu $a > 0$
(X, ρ)	kompaktní metrický prostor s metrikou ρ
$h_\mu(T)$	měrově-teoretická (Kolmogorovova) entropie zobrazení T
$h_{\text{top}}(T)$	topologická entropie zobrazení T
$\mathfrak{M}(X)$	množina borelovských pravděpodobnostních (normalizovaných) měr na X
$\mathfrak{M}(T)$	množina invariantních měr pro zobrazení T
$\mathfrak{B}(f)$	množina CO -měr koncentrovaných na cyklech
$\text{supp } \mu$	nosič míry μ
$\overline{\text{supp } \mu}$	uzávěr nosiče míry μ
$\mathcal{E}(T)$	množina ergodických T -invariantních borelovských pravděpodobnostních měr na X
$f \in L^1(\mu)$	f je konečně integrovatelná podle míry μ
χ_B	charakteristická funkce množiny B
S^1	jednotková kružnice (tj. kružnice o obvodu 1)
$L(2, I)$	množina spojitých zobrazení intervalu I do sebe takových, že každý bod $y \in I$ má nejméně dva vzory
$L^\sharp(m, I)$	podmnožina množiny $L(2, I)$
$ \deg f $	absolutní hodnota stupně funkce f
$\text{orb}(p)$	orbita bodu p
$\text{Per}(f)$	množina periodických bodů zobrazení f
$\#A$	kardinalita množiny A
$V(\varphi)$	variace funkce φ
$ f' $	sklon funkce f (absolutní hodnota derivace funkce f)
$\text{sgn } x$	signum x

Literatura

- [1] Adler R.L., Konheim A.G., McAndrew M.H., *Topological entropy*, Trans.Amer.Math.Soc. **114** (1965), 309-319.
- [2] Alsedá L., Baldwin S., Llibre J. and Misiurewicz M., *Entropy of transitive tree maps*, Topology **36** (1997), 519–532.
- [3] Alsedá L., Llibre J., Misiurewicz M., *Combinatorial dynamics and the entropy in dimension one*, Adv. Ser. in Nonlinear Dynamics 5, World Scientific, Singapore, 1993.
- [4] Blanchard F., Glasner E., Kolyada S., Maass A., *On Li-Yorke pairs*, J. Reine Angew. Math. **547** (2002), 51-68.
- [5] Block L., Coppel W.A., *Dynamics in dimension one*, Lecture Notes in Math. **1513**, Springer, Berlin, 1992.
- [6] Blokh A.M., *On sensitive mappings of the interval*, Russian Math. Surveys **37:2** (1982), 203-204.
- [7] Bobok J., *On non-differentiable measure preserving functions*, Real Analysis Exchange, **16** (1990-91), 119-129.
- [8] Bobok J., *The topological entropy versus level sets for interval maps*. Studia Math. **152** (2002), 249–261.
- [9] Bobok J., *Strictly ergodic patterns and entropy for interval maps*, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXII, **1** (2003), pp. 111-118.
- [10] Bobok J., *The topological entropy versus level sets for interval maps (Part II)*, Studia Math. **166** (2005), 11-27.
- [11] Bobok J., Nitecki Z., *The topological entropy of m -fold maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **25** (2005), 375-401.
- [12] Bobok J., Nitecki Z., *The topological entropy of m -fold maps on trees*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **27** (2007), 671-701.
- [13] Bobok J., *Generalization of Parry's theorem for piecewise monotone maps with countably many laps*, preprint, 2010.

- [14] Bobok J., Soukenka M., *On piecewise affine interval maps with countably many laps*, zasláno do Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2009.
- [15] Bowen R., *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*, Trans.Amer.Math.Soc. **153** (1971), 401-414.
- [16] Coven E., *Open problem session*, Internat. J. Bifur. Chaos. Appl. Sci. Comput. **8** (1994), 41.
- [17] Coven E.M., Hidalgo M.C., *On the topological entropy of transitive maps of the interval*, Bull. Aust. Math. Soc. **44** (1991), 207-213.
- [18] Dinaburg E.I., *The relation between topological entropy and metric entropy*, Soviet Math. **11** (1970), 13-16.
- [19] Downarowicz T., <http://www.scholarpedia.org/article/Entropy>, Scholarpedia, 2007, 2(11):3901.
- [20] Hochman M., *On Notions of Determinism in Topological Dynamics*, arXiv:0901.3606v2 [math.DS], 2009.
- [21] Katok A., Hasselblatt B., *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [22] Kelley J.L., *General Topology*. D. van Nostrand, New York, 1955.
- [23] Lasota A., Yorke J.A., *On the existence of invariant measures for piecewise monotone transformations*, Trans.Amer.Math.Soc. **186** (1973), 481-488.
- [24] Ledrappier F., Misiurewicz M., *Dimension of invariant measures for maps with exponent zero*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **5** (1985), 595-610.
- [25] Li T.Y., Yorke J.A., *Ergodic transformations from an interval into itself*, Trans.Amer.Math.Soc. **235** (1978), 183-192.
- [26] Mañé R., *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [27] Misiurewicz M., *Horseshoes for mappings of an interval*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. **27** (1979), 167-169.
- [28] Misiurewicz M., Przytycki F., *Topological entropy and degree of smooth mappings*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. **25** (1977), 573-574.
- [29] Misiurewicz M., Szlenk W., *Entropy of piecewise monotone mappings*, Studia Math. **67** (1980), 45-63.

- [30] Misiurewicz M., *Jumps of entropy in one dimension*, Fundam. Math. **132** (1989), 215-226.
- [31] Misiurewicz M., *Possible Jumps of Entropy for Interval Maps*, Qualitative Theory of Dynamical Systems **2** (2001), 289–306.
- [32] Misiurewicz M., Raith P., *Strict Inequalities for the Entropy of Transitive Piecewise Monotone Maps*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **13** (2005), 451-468.
- [33] Milnor J., Thurston W., *On iterated maps of the interval*, Dynamical systems, Lecture Notes in Math. **1342**, pp. 465-563, Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [34] Parry W., *Symbolic dynamics and transformations of the unit interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **122** (1966), 368-378.
- [35] Phelps R.R., *Lectures on Choquet's Theorem*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1966.
- [36] Raith P., *Hausdorff dimension for piecewise monotonic maps*, Studia Math. **94** (1989), 17-33.
- [37] Robinson D.W., Ruelle D., *Mean entropy of states in classical statistical mechanics*, Comm. Math. Phys. **5**, 4 (1967), 288–300.
- [38] Robinson R.C., *An Introduction to Dynamical Systems - Continuous and Discrete*, Prentice Hall; US edition, 2004.
- [39] Ruelle D., *An inequality for the entropy of differentiable maps*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **9** (1978), 83-87.
- [40] Smale S., *Diffeomorphisms with many periodic points*, Differential and Combinatorial Topology, 63-80, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1965.
- [41] Shub M., *Dynamical systems, filtrations and entropy*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 2741.
- [42] Schuster H.G., *Deterministic chaos: an introduction*, 3. ed. -Weinheim; New York; Basel; Cambridge; Tokyo: VCH, 1995.
- [43] Walters P., *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.