



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta stavební

Doktorský studijní program: **STAVEBNÍ INŽENÝRSTVÍ**
Studijní obor: **Matematika ve stavebním inženýrství**

Ing. Stanislav Olivík

**URČOVÁNÍ ODRAZNÝCH BODŮ NA ZEMSKÉM POVRCHU
METODOU BISTATICKÉ ALTIMETRIE**

DETERMINING THE REFLECTING POINT
OF BISTATIC ALTIMETRY ON THE EARTH'S SURFACE

DISERTAČNÍ PRÁCE K ZÍSKÁNÍ AKADEMICKÉHO TITULU Ph.D.

Školitel: **doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.**

Praha, září 2010

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a následné obhajobě disertační práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě stavební Českého vysokého učení technického v Praze.

Prohlašuji, že jsem disertační práci zpracoval samostatně pouze s použitím literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí, a za odborného vedení školitelky.

Praha, září 2010

.....
vlastnoruční podpis

Poděkování

Na tomto místě chci poděkovat (in memoriam) doc. RNDr. Jaroslavu Černému, CSc., za to, že mi umožnil studovat na katedře matematiky Fakulty stavební ČVUT v Praze. Dále chci poděkovat doc. RNDr. Miladě Kočandrlové, CSc., za to, že se mne ujala jako školitelka a za její trpělivost a obětavost. V neposlední řadě pak děkuji Mgr. Milanovi Boříkovi, Ph.D., za to, že mi toto studium zprostředkoval.

Taktéž děkuji prof. Ing. Jaroslavu Klokočnickovi, DrSc., za to, že mi umožnil zúčastnit se několika velmi zajímavých konferencí a workshopů.

Dále chci poděkovat všem spolužákům a kolegům za toleranci k mé osobě a za drobné výpomoci během celého mého studia.

Anotace

Na rozdíl od družicové altimetrie, která slouží lidem ke zkoumání tvaru a gravitačního pole planety Země již řadu let, je bistatická altimetrie teprve na počátku své existence. Kromě zpřesnění tvaru geoidu by měla sloužit ke zkoumání zalednění zemského povrchu či jeho zalesnění.

Bistatická altimetrie bude využívat družice na nízké oběžné dráze k zachycení signálů z družic globálních navigačních systémů, které se odrazily od zemského povrchu. Tato práce představuje několik různých postupů, jak vypočítat bod na zemském povrchu, resp. elipsoidu nahrazujícím zemský povrch, kde se odrazil signál družice globálního navigačního systému, který byl posléze zachycen přijímací družicí na nízké oběžné dráze. Jednotlivé postupy se liší podle toho, kolik je k dispozici vstupních dat. Funkčnost všech metod byla ověřena numerickým příkladem.

Klíčová slova

altimetrie, bistatická altimetrie, globální družicové navigační systémy, GPS, průnik kvadrik, referenční elipsoid

Annotation

With the help of satellite altimetry, people have been exploring the shape of the Earth and its gravitational field for decades. To the contrary, bistatic altimetry is at the beginning of its existence. It should serve to gather the data to refine the geoid and to explore the glaciation of the Earth's surface as well as its forestation.

Bistatic altimetry will use the satellites on Low Earth Orbit (LEO) to receive the signal sent by the GNSS satellites and reflected by the Earth's surface. This thesis is introducing a few different procedures on how to compute the reflecting point on the Earth's surface, or reference ellipsoid respectively. The reflecting point is a point where the signal of a GNSS satellite received by the LEO satellite was reflected. The procedures to compute these reflecting points differ according to different input data sets. The functionality of all methods was verified by numerical example.

Keywords

Altimetry, Bistatic Altimetry, Global Navigation Satellite System, GPS, Intersection of Quadrics, Reference Ellipsoid

Seznam použitého značení

ESA	European Space Agency, Evropská kosmická agentura
NASA	National Aeronautics and Space Administration, Národní úřad pro letectví a kosmonautiku
CNES	Centre National d'Études Spatiales, Francouzská národní agentura
GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positioning System
WGS-84	World Geodetic System 1984. Geocentrický pravoúhlý pravotočivý souřadnicový systém pevně spojený se Zemí. Jeho počátek je ztotožněn s těžištěm Země. WGS-84 je také označení referenčního elipsoidu použitého pro tento geodetický systém.
φ	zeměpisná šířka
λ	zeměpisná délka
N	příčný poloměr křivosti
a	hlavní poloosa elipsoidu
b	vedlejší poloosa elipsoidu
S_1	přijímací družice bistatické altimetrie
S_2	vysílací družice bistatické altimetrie

Obsah

Úvod.....	9
1 Družicová altimetrie	10
2 Satelitní navigační systémy.....	12
2.1 GPS NAVSTAR	12
2.2 GLONASS.....	15
2.3 Galileo	17
2.4 Compass.....	19
3 Bistatická altimetrie	20
3.1 Princip bistatické altimetrie.....	20
3.2 Přínos bistatické altimetrie.....	21
3.3 Družice pro bistatickou altimetrii (PARIS a PARIS IOD)	22
3.3.1 Koncept systému	22
3.3.2 Pokrytí, přesnost, výkon	23
4 Určení odrazného bodu na povrchu referenčního elipsoidu	25
4.1 Současné geometrické postupy.....	27
4.1.1 Průnik tří kvadrik ve speciální poloze	27
4.1.2 Vzdálenost dvou elipsoidů.....	32
4.1.3 Elipsoid homotetický k referenčnímu elipsoidu.....	36
4.2 Vlastní postupy	40
4.2.1 Průnik tří kvadrik	40
4.2.2 Jeden (referenční) elipsoid – půlení úsečky	43
4.2.3 Jeden (referenční) elipsoid – půlení rozdílu úhlů.....	47
5 Numerický příklad.....	49
5.1 Současné geometrické postupy.....	50
5.2 Vlastní postupy	51
Závěr	52
Přílohy.....	A
Příloha 1: Průnik tří kvadrik.....	A
Příloha 2: Převod z kartézských do zeměpisných souřadnic	G
Příloha 3: Převod ze zeměpisných do kartézských souřadnic	I

Příloha 4: Jeden (referenční) elipsoid – půlení úsečkyJ

Příloha 5: Jeden (referenční) elipsoid – půlení rozdílu úhlů K

Úvod

Bistatická altimetrie by měla být doplněním a rozšířením družicové altimetrie, proto je v první kapitole popsán princip a využití družicové altimetrie. Zmíněn je také princip systému DORIS, který je používán pro určování přesných poloh altimetrických družic.

Ve druhé kapitole je uveden přehled globálních družicových navigačních systémů. Představeny jsou zde nejen funkční systémy, jako je americký systém GPS NAVSTAR a ruský GLONASS, ale také budované systémy – evropský systém Galileo a čínský systém Compass. Signály vysílané družicemi těchto systémů budou využívány bistatickou altimetrií k získávání informací o tvaru zemského tělesa a o vlastnostech jeho povrchu.

Třetí kapitola je věnována popisu bistatické altimetrie. Kromě popisu jejího principu jsou zde uvedeny možnosti jejího využití. Část kapitoly je věnována družici PARIS, která je připravována skupinou expertů z ESA. Tato družice by měla být určena výhradně pro bistatickou altimetrii.

Ve čtvrté kapitole je popsán postup hledání odrazného bodu signálu na zemském povrchu, resp. na referenčním elipsoidu. Na začátku byla známa jedna sada vstupních dat, pro niž byla školitelkou vytvořena metoda nazvaná „Průnik tří kvadrik ve speciální poloze“. Z původní sady vstupních dat byly postupem času odvozeny další tři sady vstupních dat a pro ně pak i jednotlivé metody popsané v této kapitole. V první části kapitoly jsou uvedeny tři geometrické modely bistatické altimetrie, které vytvořila školitelka. Ve druhé části jsou uvedeny tři metody vytvořené mnou, z nichž první je jinou variantou metody „Průnik tří kvadrik ve speciální poloze“. Další dvě pak vychází z jiné (čtvrté) sady vstupních dat než ostatní metody.

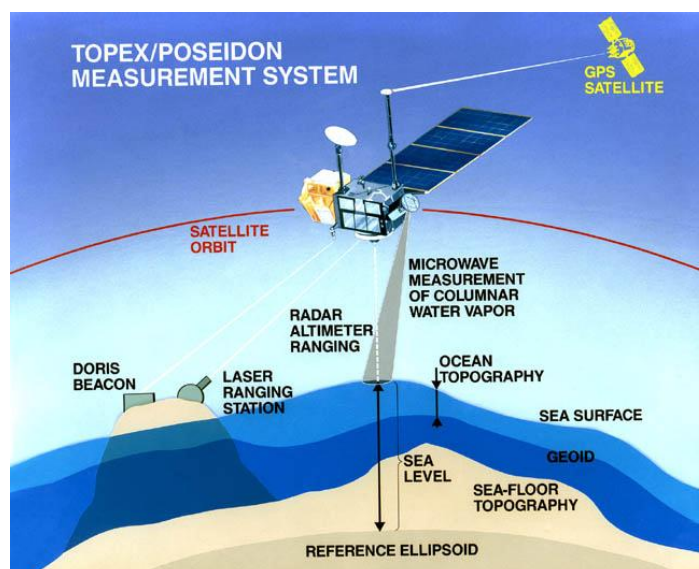
V páté kapitole jsou uvedeny numerické výsledky všech metod popsaných v této práci. Zhodnocení výsledků je provedeno v Závěru.

1 Družicová altimetrie

Družicová altimetrie se za posledních několik desítek let stala největším přínosem pro určování parametrů gravitačního pole Země a detailního geoidu v oblastech moří a oceánů. Oboje lze využít v různých oblastech lidské činnosti, jako je např. geodézie, oceánografie, klimatologie.

U družicové altimetrie se měří výška družicového nosiče nad vodní hladinou pomocí radarového, případně laserového výškoměru. Vysílač i přijímač jsou na jedné družici. Ze známé polohy družice a vypočítané délky dráhy signálu se určí poloha a nadmořská výška bodu, kde se signál odrazil.

K přesnému určení odrazného bodu je zapotřebí znát přesnou polohu družice. Ta je určována systémem DORIS, pomocí GPS navigace a laserovou telemetrií (Obrázek 1.1) (1).



Obrázek 1.1: Měřící systémy altimetrické družice TOPEX/POSEIDON (2).

DORIS (*Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite*) je francouzský systém pro určování přesných pozic družic na jejich oběžných drahách a pro navigaci. Na družici je anténa, která přijímá signál vysílaný sítí pozemních stanic. Pokud se družice přibližuje k vysílací stanici, je frekvence signálu přijatého anténou na družici větší než frekvence signálu vyslaného pozemní stanicí. Pokud se družice od stanice vzdaluje, je frekvence přijatého signálu naopak menší než frekvence signálu vyslaného. Pokud vyneseme přijatou frekvenci do grafu jako funkci času, můžeme ze sklonu křivky v bodě největšího přiblížení (*TCA point: Time of Closest Approach*) vypočítat vzdálenost mezi vysílací stanicí a družicí (3).

Přesné oběžné dráhy se počítají zpětně minimalizováním rozdílů mezi daty naměřenými systémem DORIS a daty předpovězenými modelem. Přesnost tohoto výpočtu se zvyšuje s časem. Pokud se počítá s daty získanými za tři hodiny, je přesnost určení oběžné dráhy 10 cm, pro data získaná za tři dny se přesnost zlepšuje na 4 cm a pokud se počítá s daty za 30 dní, je přesnost určení oběžné dráhy 2,5 cm (3).

Základním měřícím přístrojem na družici je altimetr (výškoměr). Altimetry pro svá měření využívají signály z různých frekvenčních pásem. Každé pásmo má své výhody a nevýhody (1):

- Frekvenční pásmo K_u (13.6 GHz) je nejpoužívanější pásmo. Je kompromisem mezi silou signálu, použitelnou šířkou signálu (určenou mezinárodními úmluvami), citlivostí na vlivy atmosféry a vlivy ionosféry.
- Frekvenční pásmo C (5.3 GHz) je citlivější na vlivy ionosféry než pásmo K_u , ale méně citlivé na vlivy vody v atmosféře. V kombinaci s pásmem K_u se využívá pro výpočet korekcí vlivu ionosféry.
- Frekvenční pásmo S (3.2 GHz) je též využíváno v kombinaci s pásmem K_u pro výpočet ionosférických korekcí.
- Frekvenční pásmo K_a (35 GHz) umožňuje získat lepší data o ledu, dešti, pobřežních oblastech, zalesnění a výšky mořských vln. Toto pásmo je širší než ostatní, což umožňuje získat vyšší rozlišení, především poblíž pobřeží. Sice se lépe odráží od ledu, ale tlumení signálu způsobené vodou či vodními parami v troposféře znemožňuje měření při dešťových srážkách větších než 1,5 mm/h.

Altimetr TOPEX (vyrobený NASA) vysílá signály na frekvencích 13,6 GHz (frekvenční pásmo K_u) a 5,3 GHz (frekvenční pásmo C). Altimetr POSEIDON (vyrobený CNES) vysílá signál na frekvenci 13,65 GHz (frekvenční pásmo K_u) (2).

Výška družice nad povrchem oceánu se určuje následovně: Altimetr vyšle signál, ten se odrazí od hladiny moře a je opět zachycen družicí. Měří se čas, za který urazí dráhu tam a zpět. Vynásobením rychlostí světla se vypočte vzdálenost družice a mořské hladiny. Tato vzdálenost se musí opravit o chyby atmosféry, ionosféry a měřících přístrojů. Opravená vzdálenost se odečte od přibližných souřadnic družice (získaných z dat systému DORIS, GPS navigace a laserové telemetrie) a výsledkem je výška mořské hladiny s přesností 4-5 cm (2).

Aby se odraznými body pokryly všechny oceány, je zapotřebí vzít v úvahu všechna měření družice za 10 dní. Jejich zprůměrováním lze určit globální úroveň hladiny oceánů s přesností několika milimetrů (2).

První altimetrická družice Seasat byla vypuštěna v roce 1978 americkou NASA. V roce 1985 následovala družice Geosat. V roce 1991 pak ESA vypustila družici ERS-1. Družice TOPEX/POSEIDON, vypuštěná v roce 1992, byl společný projekt NASA a CNES. V roce 1998 pak vypustilo americké námořnictvo společně s agenturou NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) družici GFO (1).

V současné době aktivní altimetrické družice jsou Cryosat (2010, ESA), Jason-2 (2008, CNES/NASA/Eumetsat/NOAA), Envisat (2002, ESA), Jason-1 (2001, CNES/NASA), ERS-2 (1995, ESA), Spot (CNES) a GRACE (2002, NASA) (1), (2).

2 Satelitní navigační systémy

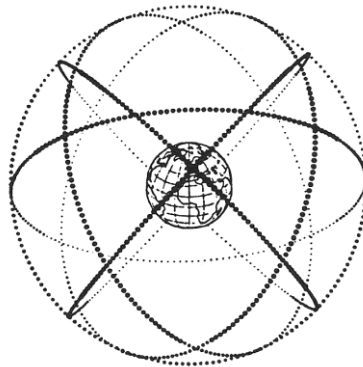
V současné době je jediným dokončeným a plně funkčním satelitním navigačním systémem americký systém GPS NAVSTAR, proto si princip satelitních navigačních systémů ukážeme právě na něm. Krátce si představíme i ruský systém GLONASS, evropský systém Galileo a čínský systém Compass.

2.1 GPS NAVSTAR

Globální družicový navigační systém GPS NAVSTAR byl vybudován a je provozován Ministerstvem obrany Spojených států amerických.

Systém GPS NAVSTAR je rozdělen na tři segmenty: kosmický, řídicí a kontrolní a uživatelský.

Kosmický segment je tvořen družicemi, které obíhají ve výšce 20 200 km nad povrchem Země na šesti kruhových drahách se sklonem 55°. Tyto dráhy jsou vůči sobě vzájemně otočeny o 60°. Oběžná doba družic je 11 hodin a 58 minut (4).



Obrázek 2.1: Oběžné dráhy družic systému GPS NAVSTAR (5).

Systém byl původně vytvářen pro 24 družic. Na každé dráze tedy byly pravidelně rozmístěny 4 družice. V současné době je však v provozu 32 družic, což znamená nepravidelné rozmístění 5-6 družic na každé oběžné dráze (4).

Klíčové části družic NAVSTAR jsou (4):

- 3 až 4 velmi přesné atomové hodiny (s chybou 10^{-13} s/rok) s rubidiovým a u starších družic také s cesiovým oscilátorem
- 12 antén RHCP pro vysílání radiových kódů v pásmu L (2000-1000 MHz)
- antény pro komunikaci s pozemními kontrolními stanicemi v pásmu S (2204,4 MHz)
- antény pro vzájemnou komunikaci družic v pásmu UHF
- optické, rentgenové a pulzní-elektromagnetické detektory a senzory pro detekci startů balistických raket a jaderných výbuchů
- solární panely a baterie jako zdroj energie

Průměrná životnost družice je přibližně 10 let, obměna kosmického segmentu pak trvá přibližně 20 let.



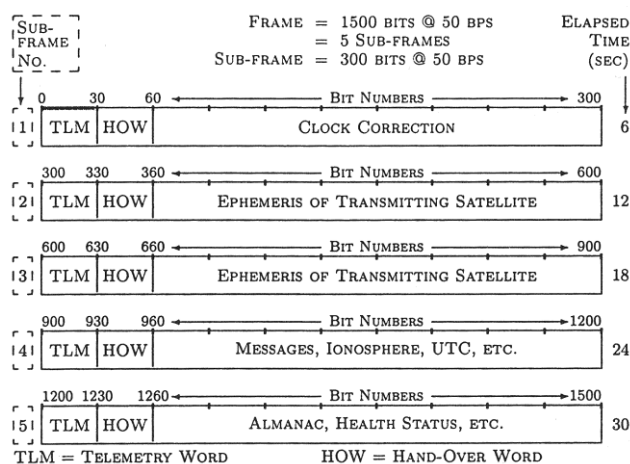
Obrázek 2.2: Družice systému GPS NAVSTAR (6).

Družice nepřetržitě vysílají signál na několika frekvencích (4)

- L1 (1575,42 MHz), kde je vysílán C/A kód je dostupná pro civilní uživatele, dále je na této frekvenci šířen vojenský P(Y) kód, který je šifrovaný a přístupný pouze pro autorizované uživatele. Družice bloku IIR-M a novější jsou připraveny vysílat vojenský M kód.
- L2 (1227,62 MHz), kde je vysílán vojenský P(Y) kód. Družice bloku IIR-M a novější jsou připraveny vysílat vojenský M kód a civilní C kód.
- L3 (1381,05 MHz) od družic bloku IIR jsou zde vysílány signály, které obsahují data monitorování startů balistických raket, detekci jaderných výbuchů a dalších vysokoenergetických zdrojů.
- L4 (1841,40 MHz) se využívá pro měření ionosferické refrakce.
- L5 (1176,45 MHz) se plánuje jako civilní Safety-of-life (SoL) signál. Tento signál vysílají družice bloku IIF.

Družice též vysílají navigační zprávu, která obsahuje (7):

- korekce atomových hodin
- predikce dráhy družice, tzv. efemeridy
- data pro model ionosférické refrakce
- čas vyslání zprávy
- přibližné pozice ostatních družic a jejich zdravotní stav



Obrázek 2.3: Struktura navigační zprávy družic GPS NAVSTAR (5).

Řídící a kontrolní segment obsahuje velitelství, řídicí středisko, 3 povelové stanice a 18 monitorovacích stanic. Jejich úkolem je hlídat stav družic, provádět korekci jejich drah, údržbu atomových hodin a udržovat s nimi komunikaci (4).

Uživatelský segment lze rozdělit na autorizované a ostatní uživatele. Autorizovaní uživatelé (vojenský sektor USA a vybrané spojenecké armády) mají k dispozici dekódovací klíče k P(Y) kódu na frekvencích L1 a L2 a mohou tedy využívat službu *Precise Positioning Service* (PPS), která zaručuje vyšší přesnost systému. Ostatní uživatelé pak mají k dispozici C/A kód na frekvencích L1 a mohou tedy využívat jen službu *Standard Positioning Service* (SPS).

Základní princip zjišťování polohy

Základním principem zjišťování polohy pomocí globálních družicových navigačních systémů jsou tzv. kódová měření.

Družice neustále vysílá navigační zprávu. Tato zpráva obsahuje čas vyslání zprávy, korekci atomových hodin na družici a přibližnou polohu vysílací družice.

Přijímač tuto zprávu dekóduje a odečte čas přijetí zprávy od času vyslání zprávy. Vynásobením takto získaného tranzitního času a rychlosti světla získáme tzv. pseudo-vzdálenost. Tranzitní čas je však zatížen chybou, neboť hodiny v přijímači a vysílači nejsou synchronní. Kromě pozice přijímače tedy potřebujeme vypočítat i opravu času. Kromě neznámých souřadnic $[X, Y, Z]$ přijímače je neznámou i oprava hodin přijímače. Máme tedy čtyři neznámé. K určení polohy tak potřebujeme nejméně čtyři družice.

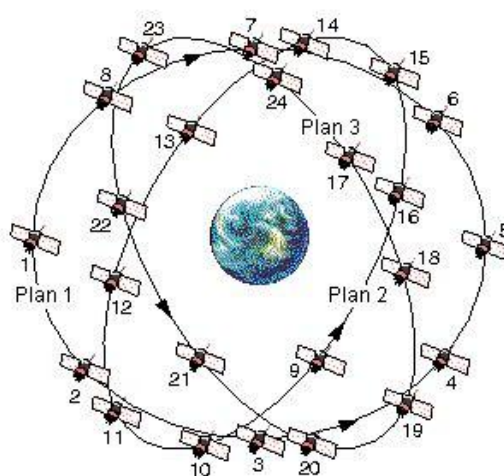
Polohu přijímače pak získáme prostorovým protínáním opravených vzdáleností družic od přijímače. Při vyšším počtu viditelných družic (přijatých signálů) je poloha počítána jako vážený průměr. Preferovány jsou kvalitnější přijaté signály a družice, které jsou výše nad obzorem.

Dalšími metodami zjišťování polohy přijímače jsou fázová, dopplerovská a úhломěrná měření.

2.2 GLONASS

Ruský navigační systém se nazývá GLONASS a je provozován ruskou armádou. K 9. září 2010 sestává z 26 satelitů, z nichž je 20 funkčních a dva jsou záložní (8). Díky tomu v současné době plně pokrývá oblast Ruska (minimální počet funkčních družic, které jsou k tomuto zapotřebí, je 18) (9). Pro plné pokrytí celého světa je zapotřebí 24 družic.

Stejně jako systém GPS NAVSTAR, je i systém GLONASS rozdělen na tři segmenty: kosmický, řídicí a uživatelský. Kosmický segment je tvořen družicemi, které obíhají ve výšce 19 100 km nad povrchem Země na třech kruhových drahách se sklonem 65°. Tyto dráhy jsou vůči sobě vzájemně otočeny o 120°. Oběžná doba družic je 11 hodin a 15 minut (10).



Obrázek 2.4: Projektovaná konstelace družic systému GLONASS na oběžné dráze (10).

Klíčové části družic Uragan systému GLONASS jsou (10):

- přesné atomové hodiny s cesiovým oscilátorem (chyba menší než 10^{-13} s/rok)
- 12 antén pro vysílání radiových kódů v pásmu L (1000-2000 MHz)
- antény pro komunikaci s pozemními kontrolními stanicemi
- solární panely o výkonu 1,45 kW a akumulátorové baterie s kapacitou 70 Ah jako zdroj energie
- odrazové pole pro měření polohy družice laserovými měřidly (SLR)

Družice vysílají signál na několika frekvencích, které jsou zvoleny v pásmech s minimálním vlivem meteorologických vlivů (10):

- L1PT (1598-1605 MHz), kde je vysílán HP kód a SP kód, vysílací výkon 64 W.
- L2PT (1242-1248 MHz), kde je vysílán HP kód a z novějších družic Uragan-M také SP kód, vysílací výkon 40 W.

Nejnovější Uragan-K a Uragan-MK budou navíc vysílat na frekvencích (10):

- L3PT (1197-1217 MHz), kde bude vysílán HP a SP kód

- L5R (1176,45 MHz), kde bude vysílán signál typu *Safety of Life* modulací založený na CDMA pro spolupráci s jinými navigačními systémy (GPS, Galileo)
- L1CR (1575,42 MHz) je další civilní signál založený na CDMA pro spolupráci s jinými navigačními systémy (GPS, Galileo)

Tyto frekvence jsou modulovány frekvenční modulací (FDMA) následujícími signály (10):

- veřejný signál SP (*Standard Precision*) s frekvencí 0,511 MHz a délkou kódu 511 bitů.
- signál pro autorizované uživatele HP (*High Precision*) s frekvencí 5,11 MHz a délkou kódu $5,11 \times 10^6$ bitů.
- navigační zpráva modulovaná navíc frekvencí 50 bitů/s při délce 7500 bitů, jejíž odvysílání trvá 2,5 minuty. Zpráva je rozdělena na 5 rámců o 15 slovech, každé slovo má rozsah 100 bitů. Obsahem zprávy jsou kartézské souřadnice družice, její rychlost a zrychlení, almanach družic s příslušnými kanály, korekce palubních hodin. Životnost zprávy je cca hodina, její pravidelné obnovení je provedeno kontrolním střediskem obvykle po 30 minutách.

Jako referenční čas je používán UTC (SU), který je synchronizován s UTC. (10)

Při příjmu signálu ze čtyř družic systému GLONASS je přesnost určení polohy z dat signálu SP v rozmezí 5-10 metrů a přesnost určení nadmořské výšky do 15 metrů. (9)

Systém GLONASS používá geografický referenční systém PZ 90, od 20. září 2007 pak jeho modifikaci PZ 90.02 (10), která zaručuje, že se liší od referenčního systému WGS-84 o méně než 40 cm v jakémkoliv směru (9).

2.3 Galileo

Globální družicový navigační systém Galileo se bude po dokončení skládat z globální, regionální a lokálních složek (11). Výstavbu globální složky zajišťují státy Evropské Unie (12).

Globální složka se skládá z vesmírného a pozemního segmentu. Vesmírný segment bude po dokončení tvořen 30 družicemi na třech středních oběžných drahách se sklonem 56° , ve výšce 23 222 km. Na každé oběžné dráze bude rozmístěno 10 družic, z nichž 9 bude funkčních a jedna záložní. Oběžná doba družic bude přibližně 14 hodin (13). Toto rozestavení družic má tu vlastnost, že se stejné rozmístění družic kolem Země opakuje vždy po 10 dnech. Za tu dobu oběhne každá družice Zemi 17 krát (11).

Sklon oběžných drah byl zvolen tak, aby systém Galileo zaručoval dobré pokrytí i v okolí zemských pólů, což GPS nezaručuje (13).



Obrázek 2.5: Rozložení družic systému Galileo (13).

Přesné časové údaje budou družicím poskytovat dvě dvojice atomových hodin

- 2 rubidiové atomové hodiny (chyba 3 sekundy za milion let)
- 2 pasivní vodíkové „maserové“ atomové hodiny (chyba 1 sekunda za milion let)

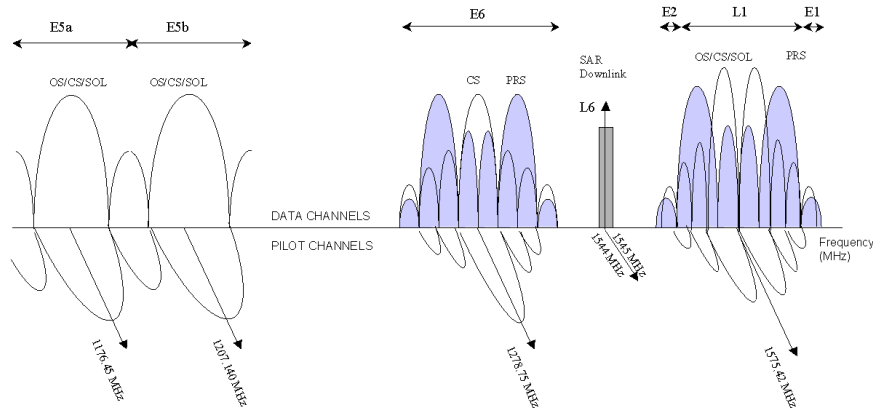
Družice budou vysílat signál na frekvencích (13)

- E5A (1176,45 MHz), kde budou vysílány signály OS, SOL a CS
- E5B (1207,14 MHz), kde budou vysílány signály OS, SOL a CS
- E6 (1278,75 MHz), kde budou vysílány signály PRS a CS#
- E2L1E1 (1575,42 MHz), kde budou vysílány signály PRS, OS, SOL a CSA
- L6 (1545 MHz), kde bude přijímat a vysílat signál SAR (11)

kde

- OS (*Open Service*) je základní, volně dostupný signál. Při využití dvoufrekvenčního příjmu bude chyba určení polohy menší než 4 metry a chyba určení výšky menší než 8 metrů (12).

- SOL (*Safety of Life Service*) je vylepšený signál s implementovanou kontrolou integrity. Sám upozorní na případné výpadky. Bude nabídnut např. řízení letecké dopravy (14).
- CS (*Commercial Service*) je zpoplatněný signál. Sestává ze dvou zašifrovaných signálů. Nabízí vyšší přesnost než OS (14).
- PRS (*Public Regulated Service*) obsahuje dva šifované signály s kontrolovaným přístupem a dlouhodobou podporou. Je určený pro armády a bezpečnostní složky států (12).
- SAR (*Search and Rescue*) je signál, kterým bude systém Galileo přispívat do mezinárodního systému COSPAS-SARSAT pro vyhledávací a záchranné operace. Každá družice bude vybavena zařízením pro přeměrování nouzového signálu od uživatele do Záchraného koordinačního centra a upozornění uživatele, že jeho situace byla zachycena (14).



Obrázek 2.6: Signály vysílané družicemi systému Galileo (11).

Pozemní segment bude mít po dokončení 30-40 snímacích stanic, 3 kontrolní centra, 9 přenosových (Mission Uplink) stanic a pět TT&C (Tracking, Telemetry and Command) stanic ke komunikaci s každou družicí. Podrobnější informace lze nalézt na stránkách European Commission's Directorate General for Enterprise and Industry (14) a České kosmické kanceláře (11).

Regionální složka systému Galileo se bude skládat z mnoha regionálních systémů, které budou vytvořené a provozované soukromými společnostmi, případně jednotlivými státy. Tato složka by měla kontrolovat integritu systému nezávisle na hlášení systému Galileo (11).

Lokální složky by měly sloužit pro vylepšení lokálního příjmu signálu Galileo. Například zajišťovat navigační signál v oblastech kde nemohou být signály z družic přijímány. Tyto lokální složky budou vytvořeny a provozovány soukromými společnostmi (11).

Jako jediný z představených navigačních systémů je primárně budován pro civilní účely. Dokončen by měl být v roce 2014.

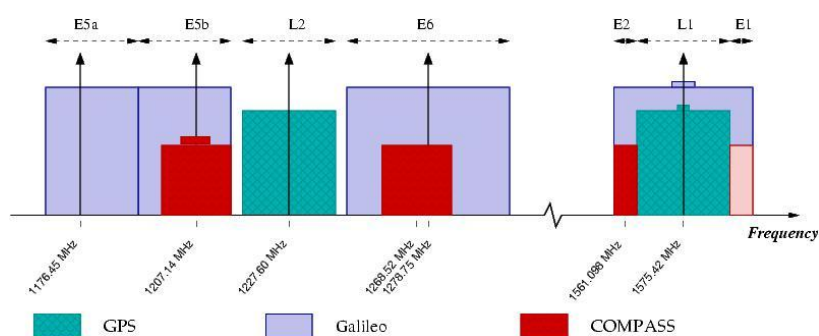
2.4 Compass

Satelitní navigační systém Compass je budován Čínskou lidovou republikou. Původně byl budován jako regionální navigační systém pod jménem Beidou. Regionální navigační systém je v současné době funkční a využívá geostacionární družice. Je dostupný v oblasti vymezené 70° až 140° východní délky a 5° až 55° severní šířky (15).

V kompletní podobě bude mít systém Compass 25-35 družic, z nichž 4 budou geostacionární (58.75° V, 80° V, 110.5° V a 140° V) (16). Ostatní družice budou umístěny na střední oběžné dráze ve výšce 21 150 km (17).

Navigační systém bude zajišťovat dva druhy služeb: bezplatnou službu pro běžné uživatele a koncesovanou službu pro autorizované a vojenské účely. Bezplatná služba bude určovat polohu s přesností 10 metrů, družicové hodiny budou synchronizovány s přesností 50 ns, rychlost bude měřena s přesností 0.2 m/s. Koncesovaná služba, která bude přesnější než bezplatná služba, bude moci být využita také pro komunikaci a bude uživatelům poskytovat informaci o stavu systému (15).

Družice systému Compass budou vysílat na frekvencích E1, E2, E5B a E6 (17). Stejně frekvence bude využívat i systém Galileo.

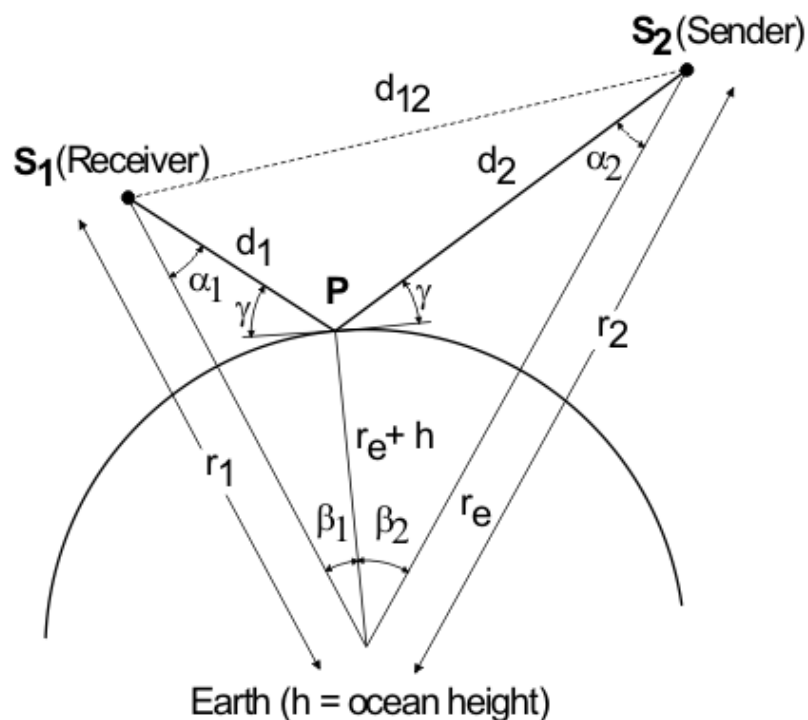


Obrázek 2.7: Frekvence signálů, na nichž vysílají družice navigačních systémů GPS, Galileo a Compass (17).

3 Bistatická altimetrie

3.1 Princip bistatické altimetrie

Bistatické radarové snímání povrchu oceánu za použití dvou družic, vysílače LEO (*Low Earth Orbit*) na nízké oběžné dráze a přijímače na geosynchronní oběžné dráze (*Geosynchronous Orbit*), prezentoval Rubaškin v roce 1993. V témže roce Martín-Niera jako první navrhl a popsal systém bistatické altimetrie s použitím družice GPS (18).



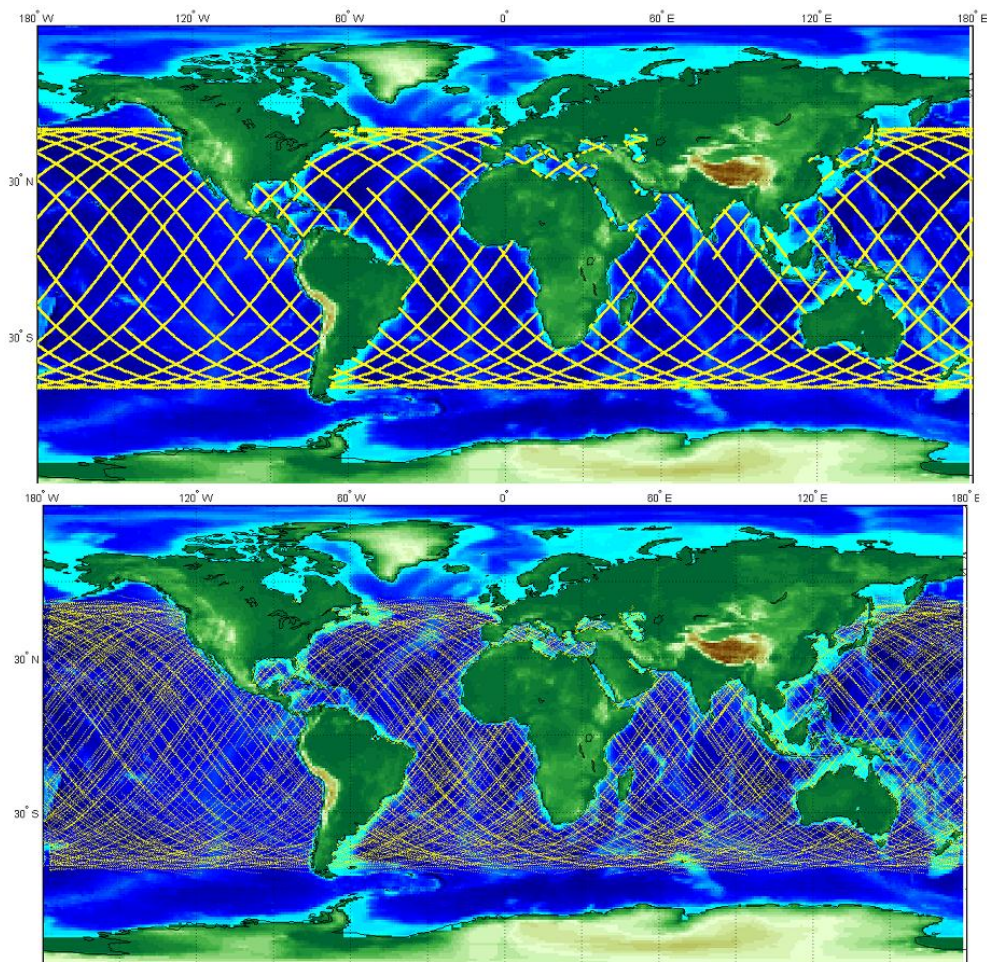
Obrázek 3.1: Princip bistatické altimetrie (18).

U nás se tímto problémem začal v roce 2001 zabývat prof. Ing. Jaroslav Klokočník, DrSc. Spolu s Carlem Wagnerem prezentoval simulace polohy a geometrie odrazných bodů na mořské hladině pro případ družic GPS a CHAMP (19). Dále se společně s Carlem Wagnerem a prof. Ing. Jan Kosteckým, DrSc., zabýval chybovými analýzami, chybami z měření zpoždění a orbitálními chybami ovlivňujícími výšku odrazného bodu na libovolném povrchu (20), (21).

Žádný z chybových modelů (20), (21) se nezabývá polohou odrazného bodu. Pravděpodobně první matematický model nalezení odrazného bodu byl prezentován doc. RNDr. Miladou Kočandrlovou, CSc., v roce 2002 (22).

3.2 *Přínos bistatické altimetrie*

Výhodou konceptu bistatické altimetrie je vyšší hustota pokrytí povrchu Země odraznými body (Obrázek 3.2).



Obrázek 3.2: Porovnání pokrytí zemského povrchu družicovou altimetrií (horní obrázek) a předpokládané pokrytí zemského povrchu bistatickou altimetrií (spodní obrázek) (23).

Kromě toho je možno z charakteristik přijatého signálu odvodit vlastnosti povrchu, od něž se signál odrazil (24). Díky tomu lze kromě běžných altimetrických dat v oblasti oceánů zjišťovat též (24), (25):

- tloušťku ledového příkrovu v polárních oblastech a jeho stáří
- rozsah zalednění a pohyb volně plovoucích ker
- velikost vln a rozbouřenost oceánů
- rychlost a směr větru nad oceány
- směry mořských proudů
- rozsah zalesnění
- vlhkost půdy

Podle simulací by mělo být možno zachytit i začínající vlnu tsunami, a to v řádech desítek minut (23).

3.3 Družice pro bistatickou altimetrii (PARIS a PARIS IOD)

Družice programu UK-DMC (Disaster Monitoring Constellation) prokázaly, že lze ve vesmíru zachytit signál družic systému GPS odražený od zemského povrchu.

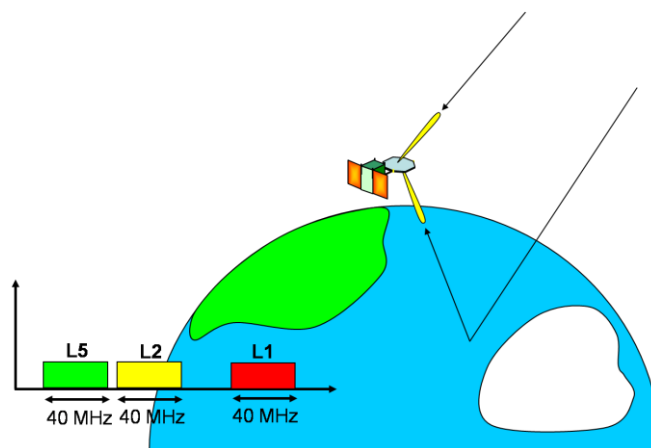
V září roku 2008 se v holandském městečku Noordwijk, v sídle Evropského vesmírného výzkumného a technického střediska Evropské kosmické agentury (ESTEC/ESA), konal Workshop GNSS-R'08, na kterém byly představeny družice PARIS a PARIS IOD.

Družice PARIS IOD je navržena jako tzv. In-orbit Demonstrator pro metodu bistatické altimetrie, což znamená, že by měla na oběžné dráze sbírat a zpracovávat data a tím pomoci prokázat funkčnost a užitečnost bistatické altimetrie. Na základě výsledků získaných pomocí PARIS IOD pak bude vyladěna plně funkční družice PARIS.

I když je družice PARIS primárně určena pro využívání signálu družic systému GPS, může s příslušným přijímačem přijímat i signály družic ruského systému GLONASS a v současné době budovaných systémů GALILEO (EU) a Compass (Čína).

3.3.1 Koncept systému

Družice PARIS IOD bude obíhat Zemi na polární oběžné dráze synchronizované se Sluncem (*Polar Sun Synchronous Orbit*) ve výšce 800 km nad povrchem, družice PARIS pak bude obíhat na oběžné dráze ve výšce 1500 km nad povrchem Země.



Obrázek 3.3: Princip bistatické altimetrie a signály GPS zpracováváné družicí PARIS IOD (26).

Družice bude mít dvě přijímací antény – jednu na vrchní straně pro příjem přímých (neodražených) signálů a jednu na spodní straně pro příjem odražených signálů (Obrázek 3.3). Data z vrchní antény budou využita pro zpřesňování polohy družice PARIS a pro korelaci s daty ze spodní antény. Antény budou přijímat celý rozsah signálů družic globálních navigačních systémů (26).

Dále bude pro svoji práci využívat (26)

- přesné odhady ionosférického zpoždění
- nízkošumové ionosférické korekce
- přesné palubní kalibrace zpoždění
- přesné palubní kalibrace amplitudy signálu

Pro zjištění ionosferických korekcí jsou zapotřebí dva signály s velkým rozdílem frekvencí, typicky L5 a L1 nebo E5 a L1

- L1 – 1575MHz, všechny kódy (i zašifrované), 1Mcps, 10Mcps
- L5 – 1176MHz, “Safety of Life”, 10Mcps
- E5 – 1176MHz, 10Mcps

Družice bude signály zpracovávat za provozu a na pozemní stanice bude vysílat již výsledná (předzpracovaná) data (26).

3.3.2 Pokrytí, přesnost, výkon

Spodní anténa družice byla navržena tak, aby přijímala odražené paprsky v maximálním odklonu 30° od nadiru. Družice PARIS IOD tak při dráze ve výšce 800 km pokryje na zemském povrchu plochu o průměru 900 km (26).

Maximální délka stopy odraženého signálu na zemském povrchu, kterou dokáže PARIS IOD zachytit, je přibližně 5500 km (23).

Průměrně by měla družice v daném okamžiku zachytit odražené signály od 4 různých družic, což je i počet odrazných bodů na zemském povrchu (23).

Při prostorovém rozlišení 100 km by měla dosahovat přesnosti určení výšky přibližně 17 cm (Tabulka 3.1 a Tabulka 3.2)

Tabulka 3.1: Shrnutí důležitých parametrů družice PARIS IOD a finální družice (25).

	In-orbit Demonstrator	Operational Mission
Orbit	Polar Sun Synchronous	Polar Sun Synchronous
Orbital Height	800 km	1500 km
Swath	900 km	1500 km
Revisit Time	3 days	2 days
Spatial Resolution	100 km	< 100 km
Antenna Diameter / Gain	1.1 m / 23 dB	2.4 m / 30 dB
Number of Beams	4	16
Frequencies	GPS L1+L5 Galileo E1+E5	All 3 bands of GPS, GLONASS, GALILEO, BEIDOU
Total Altimetry Accuracy (1 σ)	< 17 cm	< 7.5 cm

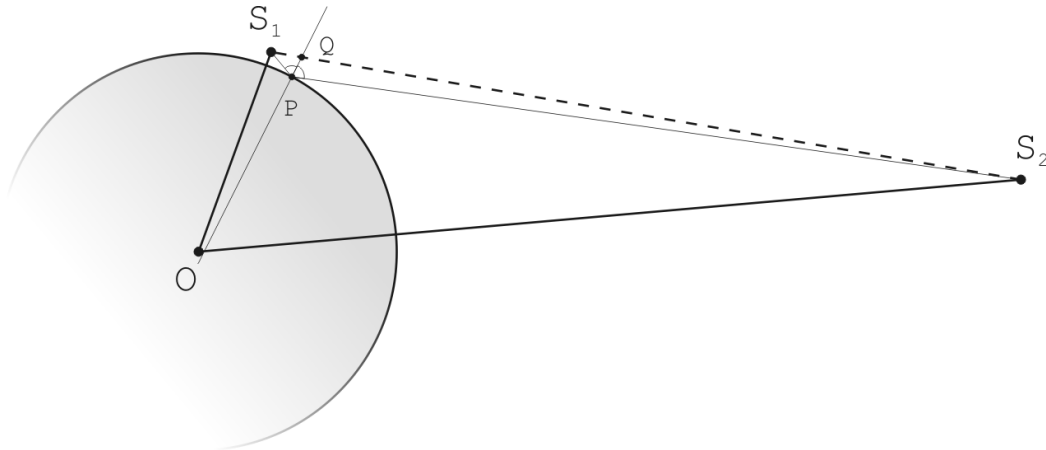
Družice PARIS na oběžné dráze ve výšce 1500 km pokryje na zemském povrchu plochu o průměru 1500 km (Tabulka 3.1). Průměrně by měla zachytávat signál od 16 družic současně. Při prostorovém rozlišení menším než 100 km by měla dosahovat přesnosti určení výšky přibližně 7,5 cm (Tabulka 3.1 a Tabulka 3.2).

Tabulka 3.2: Tabulka přesnosti určení výšek pro družici PARIS IOD (IOD) a pro finální družici (Operational). (25)

	IOD	Operational
Parameter	Height Accuracy on 100km, G=23dBi, h=800km	Height Accuracy on 100km, G=30dBi, h=1500km
Instrument Noise and Speckle	12.5 cm	4.2 cm
Ionosphere (Dual Frequency)	9.7 cm	4.8 cm
Troposphere (Wet and Dry)	5 cm	2 cm
Electromagnetic Bias	2 cm	2 cm
Skewness Bias	2 cm	2 cm
Orbit	5 cm	2 cm
Total RMS Height Accuracy	17 cm	7.5 cm

4 Určení odrazného bodu na povrchu referenčního elipsoidu

Jak již bylo popsáno v kapitole 3, využívá bistatická altimetrie dvě družice. Následující postupy byly vytvořeny pro zadání, kdy je jako vysílač využita družice systému GPS NAVSTAR. Jako přijímač je využita družice na nízké oběžné dráze (NOD), která zachycuje signál odražený od povrchu Země. Uvedené metody by však měly fungovat i pro jakékoliv jiné vysílací i přijímací družice.



Obrázek 4.1: Schematické znázornění poloh družic a referenčního elipsoidu a přibližné polohy odrazného bodu.

Všechny dále zmíněné postupy výpočtu odrazného bodu využívají následující zjednodušení:

- zanedbání vlivu fyzikálních jevů na dráhu signálu
- odrazný bod leží na povrchu referenčního elipsoidu, dochází k ideálnímu odrazu
- družice jsou v okamžiku vyslání i přijetí signálu v klidu (nepohybují se)
- vstupní data považujeme za přesná a nijak je v průběhu výpočtu neměníme

Jednotlivé metody byly vytvořeny na základě různých sad vstupních dat.

Sada 1 obsahuje (27):

- parametry referenčního elipsoidu WGS-84
- pozici vysílací družice S_2
- pozici přijímací družice S_1
- délku dráhy signálu mezi vysílací a přijímací družicí odraženého od zemského povrchu
- vektor rychlosti přijímací družice
- úhel mezi vektorem rychlosti přijímací družice a směrem přijatého signálu

Sada 2 obsahuje (28):

- parametry referenčního elipsoidu WGS-84
- pozici vysílací družice S_2
- pozici přijímací družice S_1
- délku dráhy signálu mezi vysílací a přijímací družicí odraženého od zemského povrchu.

Sada 3 obsahuje (28):

- (parametry referenčního elipsoidu WGS-84)
- pozici vysílací družice S_2
- pozici přijímací družice S_1
- délku dráhy signálu mezi vysílací a přijímací družicí odraženého od zemského povrchu.

Sada 4 obsahuje (29):

- parametry referenčního elipsoidu WGS-84
- pozici vysílací družice S_2
- pozici přijímací družice S_1

Nyní představíme postupy, které byly vytvořeny na základě jednotlivých sad vstupních dat.

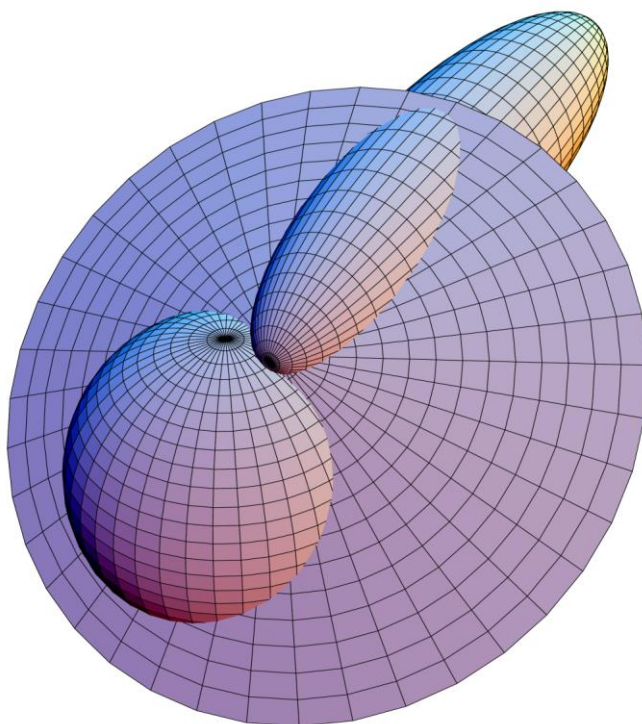
4.1 Současné geometrické postupy

4.1.1 Průnik tří kvadrik ve speciální poloze

Tato metoda byla vytvořena pro Sadu 1. Jsou tedy dány parametry referenčního elipsoidu WGS-84, geocentrické souřadnice vysílací družice S_2 a přijímací družice S_1 , délka $2a$ dráhy signálu mezi vysílací a přijímací družicí odraženého od zemského povrchu, vektor \mathbf{u} rychlosti přijímací družice S_1 a úhel θ mezi vektorem rychlosti přijímací družice S_1 a směrem přijatého signálu.

Referenční elipsoid WGS-84 označíme Q_0 . Q_1 označíme rotační elipsoid daný vysílací družicí S_2 , přijímací družicí S_1 a délkou odraženého signálu. Družice určují ohniska tohoto elipsoidu, z délky signálu lze odvodit velikost poloos. Elipsoid rotuje kolem hlavní poloosy. V textu jej dále budeme nazývat elipsoidem odrazných bodů. Q_2 pak označíme rotační kuželovou plochu danou vektorem rychlosti přijímací družice a úhlem mezi vektorem rychlosti družice a odraženým signálem. Vektor rychlosti družice určuje osu rotace, samotná družice pak vrchol kužele.

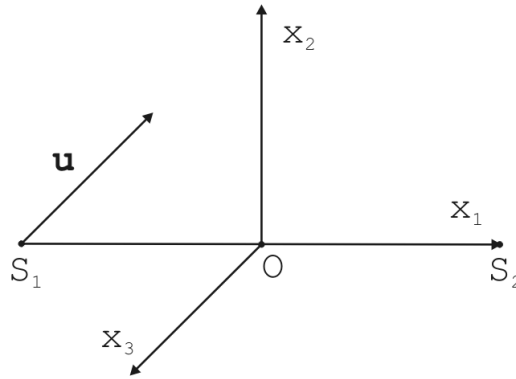
Odrasný bod P signálu určíme jako průsečík průnikové křivky kvadrik Q_1 a Q_2 s kvadrikou Q_0 (Obrázek 4.2).



Obrázek 4.2: Průnik tří kvadrik ve speciální poloze (28).

Nejdříve hledáme průnik elipsoidu odrazných bodů s rotační kuželovou plochou. Tuto úlohu budeme řešit v kartézské soustavě souřadnic $\langle O, x_1, x_2, x_3 \rangle$ (Obrázek 4.3) s počátkem O ve středu elipsoidu Q_1 a jednotkovými vektory

$$\mathbf{e}_1 = \frac{(S_2 - O)}{|S_2 - O|}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u})}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1.$$



Obrázek 4.3: Volba kartézské soustavy souřadnic.

Ve zvolené soustavě souřadnic má kvadrika Q_1 tvar

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1. \quad (4.1)$$

Má-li bod X ležet na kuželové ploše Q_2 , musí splnit podmínku

$$|(X - S_1)\mathbf{u}| = |X - S_1| \cos \theta \quad (4.2)$$

Jelikož je θ odchylka povrchových přímek kuželové plochy od její osy, je $\cos \theta > 0$. Označíme-li $u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, dostáváme z podmínky (4.2) rovnici kuželové plochy Q_2

$$((x_1 - e)u_1 + x_2u_2)^2 = \cos^2 \theta ((x_1 - e)^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad (4.3)$$

kde $e = |OS_1|$ je excentricita elipsy, jejíž rotací vzniká elipsoid (4.1).

Kvadriky Q_1 a Q_2 určují svazek kvadrik. Každá kvadrika svazku je popsána rovnicí, která je lineární kombinací rovnic (4.1) a (4.3), a obráceně, každá lineární kombinace těchto rovnic určuje kvadriku svazku. Tedy také rovnice

$$((x_1 - e)u_1 + x_2u_2)^2 = \cos^2 \theta \left((x_1 - e)^2 + b^2 - x_1^2 \frac{b^2}{a^2} \right),$$

kterou jsme dostali dosazením (4.1) do (4.3), je rovnicí kvadriky. Po úpravě dostaneme rovnici

$$((x_1 - e)u_1 + x_2u_2)^2 = \cos^2 \theta \left(x_1 \frac{e}{a} - a \right)^2.$$

Tuto rovnici můžeme dále upravit na tvar

$$\left((x_1 - e)u_1 + x_2u_2 + \cos \theta \left(x_1 \frac{e}{a} - a \right) \right) \left((x_1 - e)u_1 + x_2u_2 - \cos \theta \left(x_1 \frac{e}{a} - a \right) \right) = 0.$$

Další úpravou dostaneme singulární kvadriku svazku, která je složena ze dvou rovin určených rovnicemi

$$\begin{aligned} \rho: (x_1 - e)u_1 + x_2u_2 + \cos \theta \left(x_1 \frac{e}{a} - a \right) &= 0, \\ \rho': (x_1 - e)u_1 + x_2u_2 - \cos \theta \left(x_1 \frac{e}{a} - a \right) &= 0. \end{aligned}$$

Nyní počítáme průnik roviny ρ s kvadrikami Q_1 a Q_2 .

Průniková elipsa Q'_1 kuželové plochy Q_2 a elipsoidu Q_1 leží v rovině ρ . Společným bodem elipsy Q'_1 a referenčního elipsoidu Q_0 je odrazný bod P . Bod P je tedy společným bodem elipsy Q'_1 a elipsy Q'_0 , ve které rovina ρ protíná elipsoid Q_0 .

Kuželovou plochu Q_2 rozdělíme na dvě části. Jedna část bude tvořena body X , pro které je $(X - S_1)\mathbf{u} > 0$, druhá část pak bude tvořena body X , pro které je $(X - S_1)\mathbf{u} < 0$. Je zřejmé, že pro body elipsoidu Q_1 platí $|x_1| \leq a$. Z podmínky $x_1 \frac{e}{a} - a < 0$ pak vyplývá, že hledaný bod X leží v rovině ρ . Tuto rovinu protíná první část kuželové plochy. Průnik elipsoidu Q_1 a kuželové plochy Q_2 je tedy elipsa Q'_1 v rovině ρ .

Uřídíme střed O' a osy průnikové elipsy Q'_1 . Hlavní vrcholy A_r, B_r elipsy Q'_1 jsou v souřadnicové rovině x_1x_2 . Vektor \mathbf{u} osy kuželové plochy Q_2 otočíme v rovině x_1x_2 o úhel θ jak v kladném, tak záporném smyslu. Otočené vektory označíme \mathbf{u}_1 a \mathbf{u}_2

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Vrcholy elipsy Q'_1 pak lze vyjádřit vztahy

$$A_r = S_1 + \frac{b^2}{a+eu_{11}} \mathbf{u}_1, \quad B_r = S_1 + \frac{b^2}{a+eu_{21}} \mathbf{u}_2.$$

Velikost hlavní poloosy elipsy Q'_1 je $a_r = |A_r B_r|/2$, velikost vedlejší poloosy $b_r = |O' C_r|$, kde C_r je průsečík přímky $X = O' + t\mathbf{e}_3$ s elipsoidem Q_1 . Střed O' elipsy Q'_1 je středem úsečky $A_r B_r$.

Střed O' a jednotkové vektory hlavní a vedlejší poloosy elipsy Q'_1 určují lokální soustavu souřadnic $\langle O', \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$ v rovině ρ , kde

$$\mathbf{s}_1 = \frac{A_r - O'}{|A_r - O'|}, \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{e}_3 \quad (4.4)$$

Rovnice elipsy Q'_1 má v soustavě souřadnic (4.4) tvar

$$0 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2.$$

Soustavu souřadnic (4.4) doplníme na prostorovou, geocentrickou soustavu souřadnic s počátkem ve středu referenčního elipsoidu Q_0 . V geocentrické soustavě souřadnic nyní vyjádříme průnikové elipsy roviny ρ s oběma elipsoidy Q_0 a Q_1 , tj. $f_2(\mathbf{x}) = 0, g_2(\mathbf{x}) = 0$. To jsou kvadratické rovnice, jejichž společným řešením je odrazný bod P . Kvadratický problém převedeme na lineární pomocí svazku kuželoseček v rovině ρ .

Počet společných bodů dvou elips

Rovnici každé kuželosečky svazku určeného elipsami Q'_0 a Q'_1 , s výjimkou elipsy Q'_1 , můžeme zapsat ve tvaru

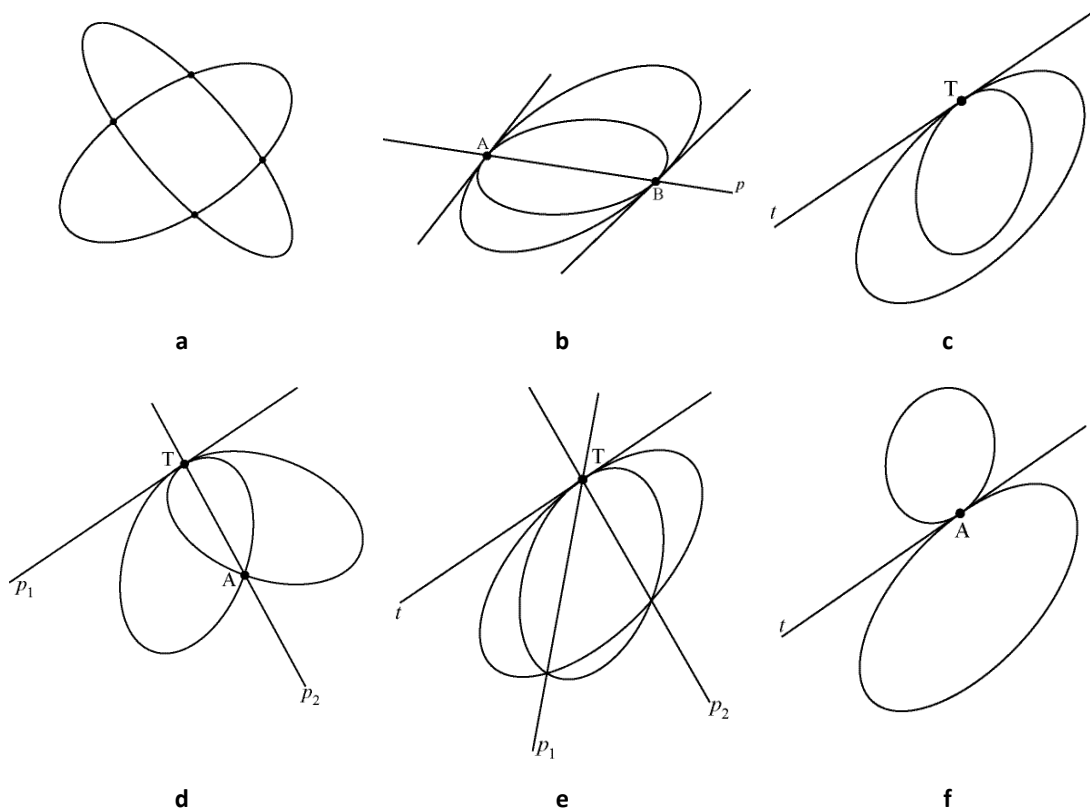
$$f_2(\mathbf{x}) + \lambda g_2(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.5)$$

Společnými body elips Q'_0 a Q'_1 procházejí také singulární kuželosečky tohoto svazku. Aby byla kuželosečka singulární, musí být determinant matice kvadratické formy (4.5) nulový. Tento determinant je polynomem třetího stupně proměnné λ . Uřídíme jeho reálný kořen λ_0 , který musí existovat alespoň jeden. Singulární kuželosečka svazku daného rovnicí (4.5) má pak vyjádření

$$f_2(\mathbf{x}) + \lambda_0 g_2(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.6)$$

Pro kvadratickou formu (4.6) mohou nastat následující možnosti (Obrázek 4.4):

1. Kvadratická forma je nulová. Pak jsou elipsy Q'_0 a Q'_1 totožné.
2. Matice kvadratické formy má hodnotu jedna. V tomto případě je singulární kuželosečka (4.6) jedinou přímkou p . Každý její bod je singulárním bodem kuželosečky (4.6). Potom může nastat právě jedna z následujících možností:
 - a) Množina $p \cap Q'_1 = \{A, B\}$. Body A, B jsou společné body elips Q'_0 a Q'_1 a obě elipsy v nich mají společnou tečnu (Obrázek 4.4b).
 - b) Množina $p \cap Q'_1 = \{A\}$. Bod A je jediný společný bod elips Q'_0 a Q'_1 , ve kterém mají společnou tečnu (Obrázek 4.4f).
 - c) Množina $p \cap Q'_1$ je tvořena dvojicí imaginárních, komplexně sdružených bodů. Elipsy Q'_0 a Q'_1 se v reálném prostoru neprotínají.
3. Matice kvadratické formy má hodnotu dva. V tom případě je kuželosečka tvořena dvojicí přímek p_1, p_2 , které mohou být buď obě reálné, nebo obě imaginární s reálným průsečíkem T, který je singulárním bodem. Máme tedy následující možnosti:
 - a) $T \in Q'_1$. Potom $T \in Q'_0$ a obě elipsy mají v bodě T společnou tečnu (Obrázek 4.4c)
 - i) Přímky p_1, p_2 jsou imaginární. Elipsy Q'_0 a Q'_1 nemají žádný další společný bod.
 - ii) Přímky p_1, p_2 jsou reálné, a to:
 - (1) Jedna z přímek p_1, p_2 je tečnou elipsy Q'_1 v bodě T. Necht' je to přímka p_1 . Potom přímka p_2 protíná elipsu Q'_1 v dalším bodě A, ve kterém se obě elipsy protínají, ale nedotýkají se (Obrázek 4.4d)
 - (2) Žádná z přímek p_1, p_2 není tečnou elipsy Q'_1 v bodě T. Potom každá z nich protne elipsu Q'_1 v jednom dalším bodě. Množina $Q'_0 \cap Q'_1$ je tudíž tříbodová a navíc mají obě elipsy v bodě T společnou tečnu (Obrázek 4.4e)
 - b) $T \notin Q'_1$. Potom
 - i) Přímky p_1, p_2 jsou imaginární, tj. množina $Q'_0 \cap Q'_1$ je prázdná.
 - ii) Přímky p_1, p_2 jsou reálné různé, tj. pro každou z nich mohou nastat tři možnosti:
 - (1) protínají elipsu Q'_1 ve dvou bodech (Obrázek 4.4a).
 - (2) dotýkají se elipsy Q'_1 v jednom bodě a další průsečík nemají.
 - (3) nemají s elipsou Q'_1 žádný společný bod.

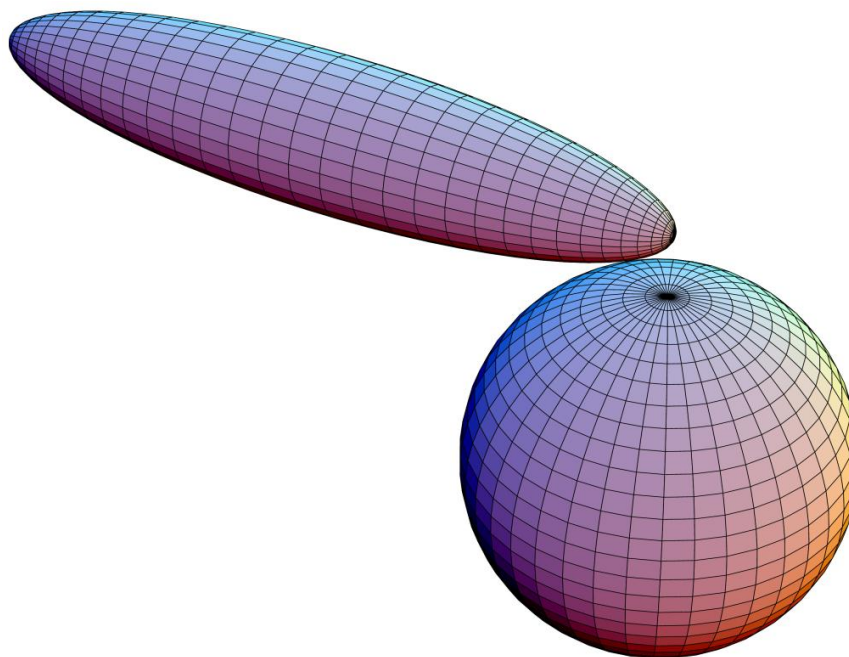


Obrázek 4.4: Klasifikace singulárních kuželoseček svazku (počet odrazných bodů) (22).

Tato metoda byla implementována v jazyce Turbo Pascal. Prvně byla doc. Kočandrlovou představena na 27. konferenci VŠTEZ v roce 2002 (22). V dalších letech byla představena na mezinárodní scéně, např. na setkání European Geoscience Union ve Vídni (28), či na Workshopu GNSS-R'08 (30).

4.1.2 Vzdálenost dvou elipsoidů

Když byl s předchozí metodou „Průnik tří kvadrik ve speciální poloze“ seznámen C. Wagner, přišel s námitkou, že nejsou příliš často známy vektor rychlosti přijímací družice a především úhel dopadu odraženého signálu na přijímací družici. Na základě jeho připomínek vznikla Sada 2, která již neobsahuje výše zmíněná vstupní data. Na jejím základě pak doc. Kočandrlová vytvořila metodu nazvanou „Vzdálenost dvou elipsoidů“, která byla mimo jiné představena na setkání European Geoscience Union v roce 2006 (28) a na Workshopu GNSS-R'08 (30).

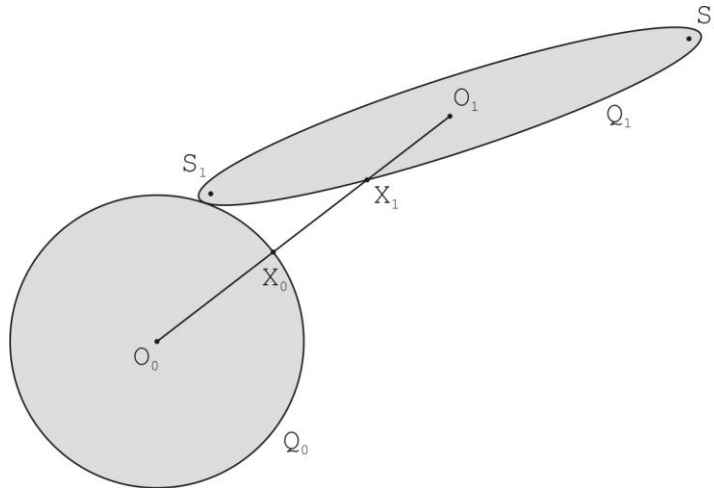


Obrázek 4.5: Referenční elipsoid WGS-84 a elipsoid odrazných bodů (28).

V tomto případě tedy známe parametry referenčního elipsoidu WGS-84, souřadnice obou družic S_1 , S_2 a délku, kterou urazil signál odražený od zemského povrchu. Máme tedy dány dva rotační elipsoidy, které označíme Q_0 a Q_1 . Q_0 označíme referenční elipsoid WGS-84, Q_1 pak elipsoid odrazných bodů. Předpokládáme, že jsou tyto elipsoidy disjunktní, resp. mají společný právě odrazný bod P jako bod dotyku. Středů elipsoidů označíme O_0 a O_1 . Hledáme body $X_0^* \in Q_0$ a $X_1^* \in Q_1$ takové, že

$$|X_0^*X_1^*| = \inf\{|X_0X_1|; X_0 \in Q_0, X_1 \in Q_1\}. \quad (4.7)$$

V případě, že se elipsoidy Q_0 a Q_1 dotýkají, je bod $X_0^* = X_1^*$ hledaným odrazným bodem. V opačném případě určíme body X_0^* a X_1^* posloupností postupných aproximací. Jako počáteční aproximaci zvolíme dvojici (X_0, X_1) takovou, že X_0 je průsečíkem polopřímky O_0O_1 s elipsoidem Q_0 a bod X_1 je průsečíkem polopřímky O_1O_0 s elipsoidem Q_1 (Obrázek 4.6) (31).



Obrázek 4.6: Počáteční aproximace bodů X_0 a X_1 .

Pro určení dalších aproximací využijeme středy normálových křivostí elipsoidů v bodech předchozích aproximací. V bodě X_0 určíme jednotkový normálový vektor \mathbf{n}_0 elipsoidu Q_0 orientovaný dovnitř. Stejně tak určíme v bodě X_1 jednotkový normálový vektor \mathbf{n}_1 elipsoidu Q_1 orientovaný dovnitř. Pokud je dimenze prostoru $V = \langle X_0 - X_1, \mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1 \rangle$ rovna jedné, je dvojice (X_0, X_1) hledaným řešením.

Pokud je dimenze prostoru V větší než jedna, zvolíme v bodě X_0 normálový řez elipsoidu Q_0 . Příslušnou normálovou rovinu určíme tak, aby buď obsahovala bod X_1 elipsoidu Q_1 , nebo její zaměření obsahovalo vektor \mathbf{n}_1 . Za normálovou rovinu tedy můžeme vybrat jednu z rovin daných rovnicemi

$$[X - X_0, \mathbf{n}_0, X_1 - X_0] = 0, \quad [X - X_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1] = 0,$$

nebo rovinu, která je určena vhodnou lineární kombinací těchto rovnic.

Nyní určíme v bodě X_0 střed křivosti zvoleného normálového řezu elipsoidu Q_0 . Tento střed křivosti označíme O_0 (podrobněji popsáno v kapitole 4.1.3). Stejným způsobem určíme střed křivosti normálového řezu elipsoidu Q_1 , který označíme O_1 . Poté ověříme, zda přímka O_0O_1 protíná elipsoidy Q_0 a Q_1 . Pokud ano, označíme průsečíky X_0^* , resp. X_1^* a prohlásíme je další aproximací.

Oba elipsoidy určíme rovnicí v homogenních souřadnicích

$$\sum_{i,j=0}^3 f_{ij} x_i x_j = 0 \quad (4.8)$$

Označíme-li symetrickou matici prvků $f_{ij}, i, j = 0, 1, 2, 3$ jako \mathbf{F} , můžeme rovnici (4.8) přepsat na tvar

$$\mathbf{x} \mathbf{F} \mathbf{x}^T = 0, \quad (4.9)$$

kde $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Rovnice (4.8) určuje kvadriku jednoznačně až na nenulový násobek. Budeme proto předpokládat, že jsme rovnici zvolili tak, že $f_{33} > 0$. Rovnicí (4.8) pak bude elipsoid určen právě tehdy, pokud

$$\begin{vmatrix} f_{22} & f_{23} \\ f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \det(\mathbf{F}) > 0.$$

Homogenní souřadnice s_0, s_1, s_2, s_3 středu kvadriky dostaneme řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} f_{10}s_0 + f_{11}s_1 + f_{12}s_2 + f_{13}s_3 &= 0, \\ f_{20}s_0 + f_{21}s_1 + f_{22}s_2 + f_{23}s_3 &= 0, \\ f_{30}s_0 + f_{31}s_1 + f_{32}s_2 + f_{33}s_3 &= 0. \end{aligned}$$

Pro výpočet průsečíků přímky O_0O_1 s elipsoidem dosadíme parametrické vyjádření přímky

$$\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{s}_0 + \lambda_1 \mathbf{s}_1 \quad (4.10)$$

do rovnice (4.9) elipsoidu. Označíme-li $b_{ij} = \mathbf{s}_i F \mathbf{s}_j^T$, $i, j = 0, 1$, dostaneme pro parametry λ_0, λ_1 kvadratickou rovnici

$$\lambda_0^2 b_{00} + 2\lambda_0 \lambda_1 b_{01} + \lambda_1^2 b_{11} = 0.$$

Pro její diskriminant D platí

$$\frac{1}{4}D = b_{01}^2 - b_{00}b_{11}$$

a pokud $D \geq 0$, je

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)_{1,2} = \frac{-b_{01} \pm \sqrt{D}}{b_{00}}.$$

V algoritmu počítáme s uspořádáním bodů na přímce, proto nyní uvedeme, co tím budeme rozumět.

Nechť je bod X dán rovnicí (4.10) a bod X' analogickou rovnicí $x' = \lambda'_0 \mathbf{s}_0 + \lambda'_1 \mathbf{s}_1$. Při uspořádání bodů na přímce O_0O_1 , ve kterém je $O_0 < O_1$ (bod O_0 je před bodem O_1), bude $X' < X$ právě tehdy, když

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda'_0 + \lambda'_1} < \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1}.$$

Pokud jsou ve speciálním případě oba elipsoidy sférami, získáme přesné řešení již při počáteční aproximaci. A to i v případě, že body O_0, O_1 nebudou středy sfér. V takovém případě totiž středy křivosti každého normálového řezu leží ve středech sfér a jimi určená přímka protíná sféry v bodě dotyku.

Tento algoritmus postupuje analogicky. Nahrazuje křivky na elipsoidu jejich oskulačními kružnicemi, díky čemuž je rychlý.

Algoritmus je ošetřen proti chybě, kdy by přímka O_0O_1 neprotínala oba elipsoidy. Při každém iteračním kroku se nejprve testuje, zda existují příslušné průsečíky. Pokud neexistují, zmenší se poloměr křivosti na polovinu. Postup se opakuje, dokud přímka elipsoidy neprotne.

Zdrojem chyb může být i určování poloměru normálové křivosti. Budou-li se body X_0, X_1 blížit přímce O_0O_1 , může dojít vlivem zaokrouhlovacích chyb ke značným nepřesnostem. A to jak v určení polohy normálového řezu, tak i v určení jeho poloměru křivosti. Bude-li poloměr křivosti příliš velký, může dojít k nežádoucím oscilacím. To lze odstranit použitím minimálního poloměru normálové křivosti. Tento minimální poloměr normálové křivosti určíme pomocí hlavních křivostí elipsoidu.

V bodě X elipsoidu zvolíme libovolnou ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ jeho tečné roviny. Označíme $g_{ij} = \mathbf{e}_i^T F \mathbf{e}_j$, $i, j = 1, 2$. Hlavní křivosti k_1, k_2 jsou pak vlastní čísla matice (g_{ij})

$$k_{1,2} = \frac{g_{11} + g_{22} \pm \sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4g_{12}^2}}{2}. \quad (4.11)$$

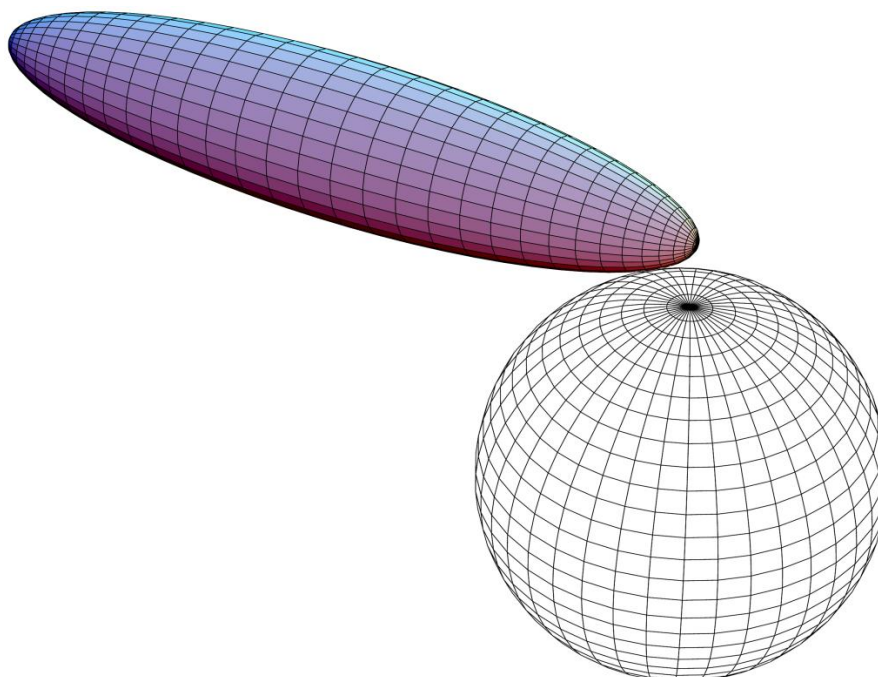
Za poloměr r pak volíme převrácenou hodnotu (4.11). Tím se odstraní případné oscilace, na druhou stranu tím poněkud zpomalíme konvergenci algoritmu.

Algoritmus skončí, pokud bude rozdíl sousedních aproximací menší než předem zadaná hodnota.

Tato metoda byla implementována v jazyce Turbo Pascal.

4.1.3 Elipsoid homotetický k referenčnímu elipsoidu

Jelikož se v geodézii používá mnoho různých referenčních elipsoidů, přišla doc. Kočandrlová s myšlenkou počítat pro každý odrazný bod jeho vlastní referenční elipsoid, který by měl střed totožný s referenčním elipsoidem WGS-84. Tak vznikl postup nazvaný „Elipsoid homotetický k referenčnímu elipsoidu“, jehož výstupem jsou kromě souřadnic odrazného bodu též parametry onoho homotetického elipsoidu příslušícího k vypočtenému bodu. Vstupními daty jsou zde pozice vysílací družice S_2 , pozice přijímací družice S_1 , délka signálu mezi vysílací a přijímací družicí odraženého od zemského povrchu a parametry referenčního elipsoidu WGS-84, které se ovšem použijí pouze k výpočtu parametrů transformace a výpočtu elipsoidu homotetického k referenčnímu elipsoidu (Sada 3).



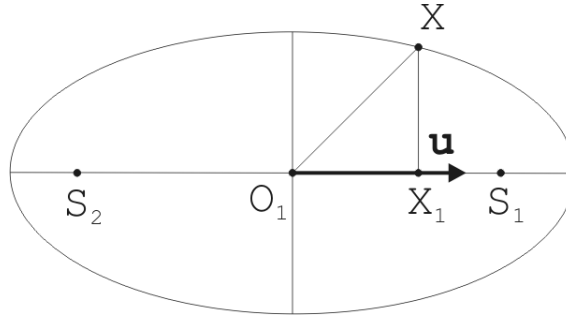
Obrázek 4.7: Referenční elipsoid WGS-84 a elipsoid odrazných bodů. Z referenčního elipsoidu jsou převzaty pouze některé parametry (28).

Následující metoda byla prvně představena doc. Kočandrlovou v roce 2005 (32). V roce 2006 pak byla představena i na mezinárodní scéně, mimo jiné na setkání European Geoscience Union ve Vídni (28). Byla též přestavena na Workshop GNSS-R'08 (30).

Pokud hledáme odrazný bod na referenčním elipsoidu při znalosti poloh obou družic (S_1 , S_2), délky dráhy signálu odraženého od zemského povrchu a parametrů referenčního elipsoidu, je tato úloha z matematického hlediska přeuročena. Proto zvolíme elipsoid odrazných bodů jako pevný, a hledáme elipsoid homotetický (stejnolehlý) k referenčnímu elipsoidu, který má s elipsoidem odrazných bodů právě jeden společný bod (tj. mají v tomto bodě vnější dotyk). Tento společný bod je hledaným odrazným bodem.

Elipsoid odrazných bodů opět označíme Q_1 a referenční elipsoid Q_0 .

Pro řešení daného problému bude výhodné vyjádřit elipsoid Q_1 v geocentrické soustavě souřadnic. Středem elipsoidu Q_1 je bod $O_1 = (S_1 + S_2)/2$. Jednotkový vektor hlavní osy označíme $\mathbf{u} = (S_1 - S_2)/2e$.



Obrázek 4.8: Meridián elipsoidu odrazných bodů (Q_1).

Pro body X elipsy, jejíž rotací vzniká elipsoid Q_1 (Obrázek 4.8) platí

$$|O_1X_1| = \mathbf{u}(X - O_1), \quad (4.12)$$

$$|XX_1|^2 = |O_1X|^2 - |O_1X_1|^2. \quad (4.13)$$

Středová rovnice této elipsy pak je

$$\frac{|O_1X_1|^2}{a^2} + \frac{|XX_1|^2}{b^2} = 1. \quad (4.14)$$

Dosazením (4.12) a (4.13) do rovnice (4.14) postupně dostáváme rovnici (4.15) elipsoidu Q_1

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{u}(X - O_1))^2}{a^2} + \frac{(X - O_1)^2 - (\mathbf{u}(X - O_1))^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{(X - O_1)^2}{b^2} + (\mathbf{u}(X - O_1))^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) &= 1, \\ (X - O_1)^2 - \frac{e^2}{a^2} (\mathbf{u}(X - O_1))^2 - b^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Rozepsáním do souřadnic získá rovnice (4.15) tvar

$$\begin{aligned} x_1^2 \left(1 - \frac{e^2 u_1^2}{a^2} \right) + x_2^2 \left(1 - \frac{e^2 u_2^2}{a^2} \right) + x_3^2 \left(1 - \frac{e^2 u_3^2}{a^2} \right) - 2x_1x_2 \frac{e^2 u_1 u_2}{a^2} - 2x_1x_3 \frac{e^2 u_1 u_3}{a^2} - \\ - 2x_2x_3 \frac{e^2 u_2 u_3}{a^2} + 2x_1 \left(\frac{e^2}{a^2} u_1(\mathbf{u}\mathbf{o}) - o_1 \right) + 2x_2 \left(\frac{e^2}{a^2} u_2(\mathbf{u}\mathbf{o}) - o_2 \right) + \\ + 2x_3 \left(\frac{e^2}{a^2} u_3(\mathbf{u}\mathbf{o}) - o_3 \right) + \mathbf{o}^2 - b^2 - \frac{e^2}{b^2} (\mathbf{u}\mathbf{o})^2 = 0, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je vektor osy elipsoidu Q_1 a $\mathbf{o} = (o_1, o_2, o_3)$ je radius vektor jejího středu O_1 . Pokud navíc označíme numerickou excentricitu $\varepsilon = e/a$, má matice kvadratické formy elipsoidu Q_1 tvar

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{o}^2 - b^2 - \varepsilon^2 (\mathbf{u}\mathbf{o})^2 & u_1 \varepsilon^2 (\mathbf{u}\mathbf{o}) - o_1 & u_2 \varepsilon^2 (\mathbf{u}\mathbf{o}) - o_2 & u_3 \varepsilon^2 (\mathbf{u}\mathbf{o}) - o_3 \\ u_1 \varepsilon^2 (\mathbf{u}\mathbf{o}) - o_1 & 1 - u_1^2 \varepsilon^2 & -u_1 u_2 \varepsilon^2 & -u_1 u_3 \varepsilon^2 \\ u_2 \varepsilon^2 (\mathbf{u}\mathbf{o}) - o_2 & -u_1 u_2 \varepsilon^2 & 1 - u_2^2 \varepsilon^2 & -u_2 u_3 \varepsilon^2 \\ u_3 \varepsilon^2 (\mathbf{u}\mathbf{o}) - o_3 & -u_1 u_3 \varepsilon^2 & -u_2 u_3 \varepsilon^2 & 1 - u_3^2 \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Na elipsoidu Q_1 nyní hledáme bod P , který je nejbližší referenčnímu elipsoidu Q_0 . Vezmeme-li bod P a jeho protějšek na elipsoidu Q_0 , jsou v nich tečné roviny příslušných elipsoidů rovnoběžné a tuto rovnoběžnost zachovává i afinita. Proto můžeme jeden z elipsoidů převést afinitou na sféru, čímž se zjednoduší hledání bodu P .

Afinitu, která převede referenční elipsoid Q_0 s poloosami a_0 a b_0 na sféru, vyjádříme následovně

$$x' = x, y' = y, z' = z/q, \quad (4.16)$$

kde $q = b_0/a_0$.

Obrazem rotačního elipsoidu Q_1 v této afinitě je nerotační elipsoid, který označíme Q'_1 . Označíme-li f_{ij} , $i, j = 0, \dots, 3$ prvky matice \mathbf{F} , pak

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & qf_{03} \\ f_{01} & f_{11} & f_{12} & qf_{13} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} & qf_{23} \\ qf_{03} & qf_{13} & qf_{23} & q^2 f_{33} \end{pmatrix}.$$

je matice elipsoidu Q'_1 . Tím jsme řešenou úlohu transformovali na úlohu najít na elipsoidu Q'_1 bod, který je nejbližší sféře Q'_0 získané afinitou z referenčního elipsoidu Q_0 .

Označíme O_0 , resp O'_1 střed referenčního elipsoidu Q'_0 , resp elipsoidu Q'_1 . Úsečka $O_0O'_1$ protíná elipsoid Q'_1 v bodě P' . V bodě P' zvolíme normálovou rovinu elipsoidu Q'_1 , která obsahuje bod O_0 , jednotkový normálový vektor \mathbf{n} a jednotkový tečný vektor \mathbf{t} elipsoidu Q'_1 v bodě P' . Normálový vektor \mathbf{n} zvolíme orientovaný dovnitř elipsoidu.

Ve směru tečného vektoru \mathbf{t} určíme střed normálové křivosti elipsoidu Q'_1 v bodě P' . Tento střed označíme O'_1 , určíme průsečík P' nové úsečky $O_0O'_1$ s elipsoidem Q'_1 .

Tímto způsobem sestrojíme posloupnost průsečíků P' s elipsoidem Q'_1 , která konverguje k bodu na elipsoidu Q'_1 , který má nejmenší vzdálenost od středu sféry Q'_0 , resp. referenčního elipsoidu Q_0 . Výpočet této posloupnosti ukončíme, pokud je vzdálenost bodů P' spočítaných ve dvou po sobě jdoucích iteracích menší než předem zadaná hodnota.

K bodu P' na elipsoidu Q'_1 určíme v afinitě inverzní k afinitě (4.16) obraz P na elipsoidu Q_1 . Referenční elipsoid, procházející bodem P , určíme stejnolehlostí o středu O_0 . Koeficient této stejnolehlosti je dán dvojicí bodů P , P_0 , kde P_0 je průsečík polopřímky O_0P s referenčním elipsoidem Q_0 . Bod P prohlásíme odrazným bodem.

Tato metoda byla implementována v jazyce Turbo Pascal.

Střed křivosti normálového řezu elipsoidu

Střed normálové křivosti elipsoidu Q'_1 v bodě P' je středem křivosti jeho normálového řezu. Abychom popsali tento řez analyticky, zvolíme v normálové rovině kartézskou soustavu $\langle P', \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle$, obr. Rovnice elipsy normálového řezu elipsoidu bude mít v příslušných homogenních souřadnicích tvar

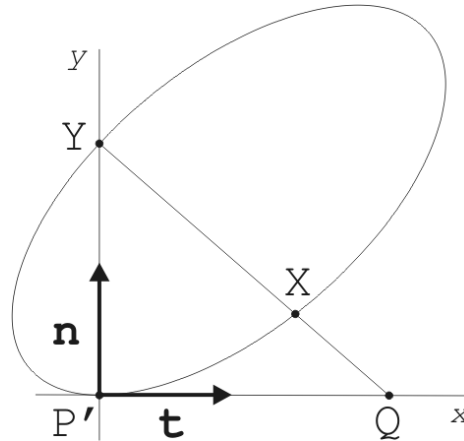
$$(x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.17)$$

kde $a_{00} = 0$. Rovnice její tečny v počátku tedy je

$$a_{01}x_1 + a_{02}x_2 = 0.$$

Odtud plyne, že $a_{01} = 0$. Rovnice (4.17) má v kartézských souřadnicích tvar

$$a_{11}x^2 + 2a_{02}y + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0. \quad (4.18)$$



Obrázek 4.9: Volba soustavy souřadnic pro parametrizaci normálového řezu elipsoidu.

Pro některé výpočty v algoritmu je vhodné parametrické vyjádření elipsy (4.18). Budeme ji parametrizovat svazkem přímek se středem v průsečíku Y osy y s elipsou. Bod $Y = [0, -2a_{02}/a_{22}]$. Druhým bodem těchto přímek je jejich průsečík s osou x , který označíme $Q = [t, 0]$ (Obrázek 4.9). Parametrické vyjádření svazku přímek pak má tvar

$$X = Y + \alpha(Q - Y) = \left[\alpha t, \frac{2a_{02}}{a_{22}}(\alpha - 1) \right]. \quad (4.19)$$

Bod X z rovnice (4.19) dosadíme do rovnice elipsy (4.18) a vypočteme parametr α

$$\alpha = \frac{4a_{02}(a_{12}t + a_{02})}{a_{11}a_{22}t^2 + 4a_{02}a_{12}t + 4a_{02}^2}.$$

Po dosazení parametru α do rovnice (4.19) získáme hledanou parametrizaci elipsy

$$X = \left[\frac{4a_{02}(a_{12}t + a_{02})t}{a_{11}a_{22}t^2 + 4a_{02}a_{12}t + 4a_{02}^2}, \frac{-2a_{02}a_{11}t^2}{a_{11}a_{22}t^2 + 4a_{02}a_{12}t + 4a_{02}^2} \right].$$

Pro křivost k křivky, dané explicitní rovnicí $y = y(x)$, platí známý vzorec

$$k = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}.$$

Obě derivace vypočítáme z implicitní rovnice elipsy (4.18)

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11}x + a_{02}y' + a_{12}y + a_{12}xy' + a_{22}yy', \\ 0 &= a_{11} + a_{02}y'' + a_{12}y' + a_{12}xy'' + a_{22}yy'^2 + a_{22}y'''. \end{aligned}$$

Derivace v bodě P' pak jsou

$$y' = 0, \quad y'' = -\frac{a_{11}}{a_{02}}.$$

Hledaná křivost $k = y''$ a odpovídající poloměr křivosti je převrácená hodnota křivosti k

$$r = \left| \frac{a_{02}}{a_{11}} \right|.$$

Střed křivosti v bodě P' pak vypočteme jako $S = P' + r\mathbf{n}$.

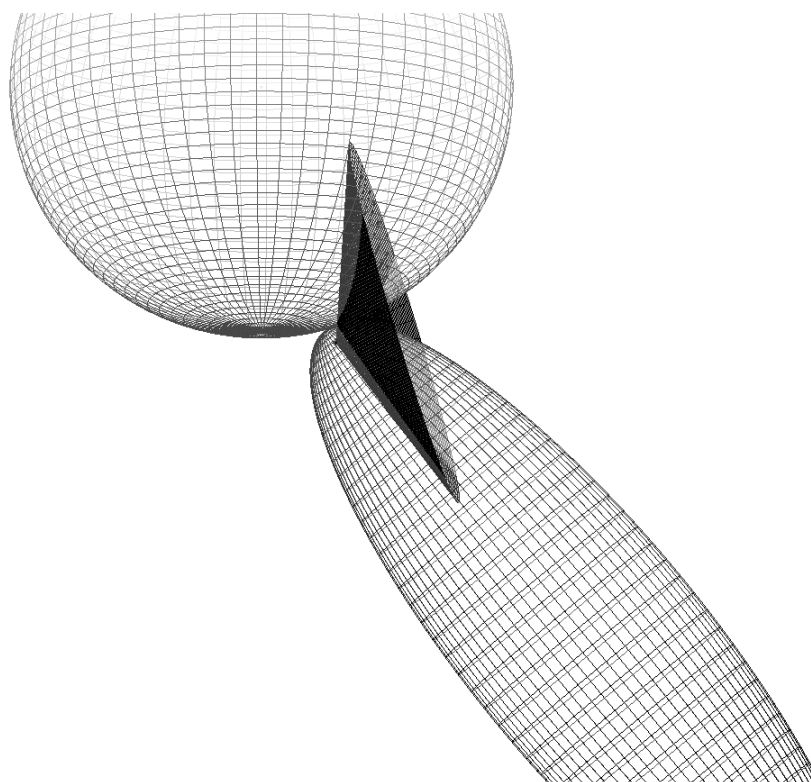
4.2 Vlastní postupy

4.2.1 Průnik tří kvadrik

Tato metoda byla vytvořena pro Sadu 1.

Dle matematického modelu navrženého doc. Kočandrlovou (kapitola 4.1.1), (22) se odrazný bod počítá jako průnik tří kvadratických ploch. Těmito plochami jsou:

- Referenční elipsoid WGS-84
- Rotační elipsoid daný vysílací družicí S_2 , přijímací družicí S_1 a délkou odraženého signálu. Družice určují ohniska tohoto elipsoidu, z délky signálu lze odvodit velikost poloos. Elipsoid rotuje kolem hlavní poloosy. V textu jej nazýváme elipsoidem odrazných bodů.
- Rotační kuželová plocha daná vektorem rychlosti přijímací družice a úhlem mezi vektorem rychlosti družice a odraženým signálem. Vektor rychlosti družice určuje osu rotace, samotná družice pak vrchol kužele.



Obrázek 4.10: Průnik tří kvadrik.

Následující postup jsem prvně prezentoval na konferenci Geometrie a počítačová grafika 2004 (33).

Nejprve počítáme průnik elipsoidu odrazných bodů s rotační kuželovou plochou. V libovolné vzdálenosti od vrcholu kužele zvolíme rovnoběžkovou kružnici (referenční kružnice). Na kružnici zvolíme dělicí body K_i . V dělicích bodech určíme polopřímku vycházející z vrcholu kuželové plochy a určíme její průsečík s elipsoidem odrazných bodů.

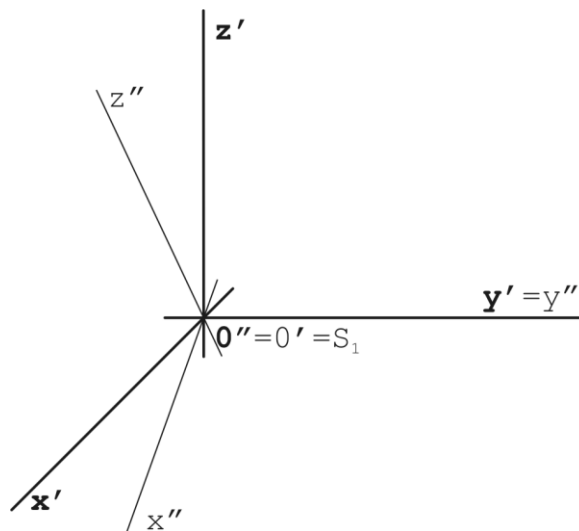
Při tomto výpočtu použijeme dvě lokální souřadnicové soustavy. Obě mají počátek v bodě daném souřadnicemi přijímací družice S_1 . Souřadnicová soustava pro elipsoid odrazných bodů má osy orientované následujícím způsobem:

- osa x' má směr vektoru $S_2 - S_1$
- osa y' je určena tak, aby byla kolmá na osu x' a na vektor rychlosti přijímací družice S_1
- osa z' je dopočítána tak, aby bázové vektory byly jednotkové a určovaly kladně orientovanou soustavu souřadnic

Souřadnicová soustava rotačního kužele má osy orientované následujícím způsobem:

- osa x'' má směr vektoru rychlosti přijímací družice S_1
- osa y'' je určena tak, aby byla kolmá na vektor $S_2 - S_1$ a na osu x''
- osa z'' je dopočítána tak, aby bázové vektory byly jednotkové a určovaly kladně orientovanou soustavu souřadnic

Takto zvolené souřadné soustavy mají výhodu v tom, že mají společný počátek a jsou vůči sobě pootočený kolem osy $y' = y''$ (Obrázek 4.11).



Obrázek 4.11: Schematické znázornění lokálních souřadných soustav.

Pro body na kuželové ploše pak platí vztahy

$$\begin{aligned} x'' &= r \\ y'' &= r \tan \theta \cos \omega \\ z'' &= r \tan \theta \sin \omega, \end{aligned} \quad (4.20)$$

kde θ je úhel mezi vektorem rychlosti družice S_1 a přijatým signálem.

Pro polopřímku S_1K_i na rotační kuželové platí vztahy

$$\begin{aligned} x' &= tu \\ y' &= tv \\ z' &= tw, \end{aligned} \quad (4.21)$$

kde u, v, w jsou souřadnice bodu K_i .

Po dosazení vztahů (4.21) do rovnice elipsoidu odrazných bodů

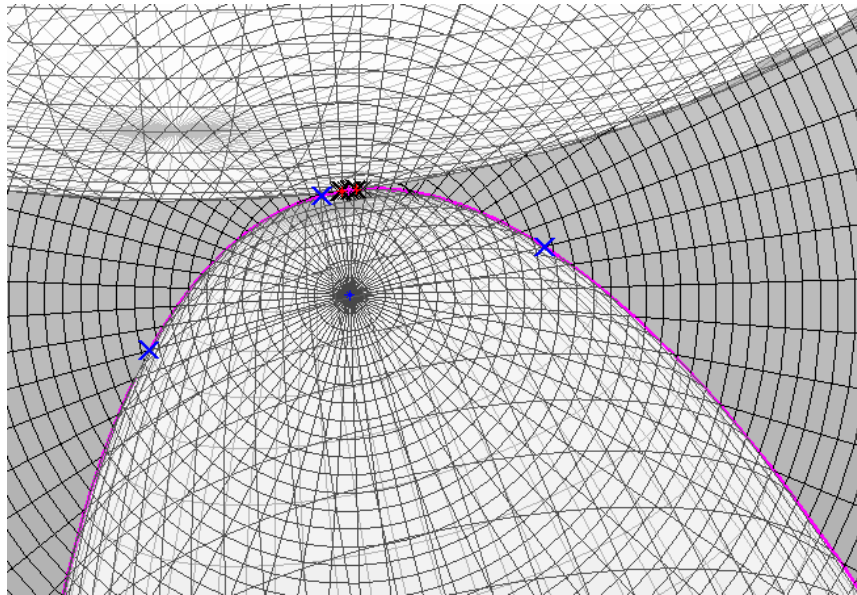
$$\frac{(x' - x'_F)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{b^2} = 1 \quad (4.22)$$

získáme kvadratickou rovnici pro parametr t .

Jejím řešením získáme vztah

$$t_{1,2} = \frac{2ux'_F b^2 \pm \sqrt{(-2ux'_F b^2)^2 - 4((u^2 b^2 + v^2 b^2 + w^2 a^2)(b^2 x'_F - a^2 b^2))}}{2(u^2 b^2 + v^2 b^2 + w^2 a^2)}. \quad (4.23)$$

Dosazením hodnoty parametru $t > 0$ do vztahu (4.21) dostáváme souřadnice bodu L_i průnikové křivky elipsoidu a kuželové plochy (Obrázek 4.12).



Obrázek 4.12: Průsečíky elipsoidu odrazných bodů a kuželové plochy. Fialová křivka je průsečnice kužele a elipsoidu odrazných bodů. Modře jsou vyznačeny průsečíky přímek vedených hranicemi kvadrantů referenční kružnice na kuželové ploše.

Postup hledání odrazného bodu je pak následující:

- i. vybereme kružnici na kuželové ploše
- ii. kružnici rozdělíme na kvadranty
- iii. body, které získáme dělením kružnicového oblouku, vedeme přímky z vrcholu kuželové plochy
- iv. vypočteme průsečík přímky s elipsoidem odrazných bodů (Obrázek 4.12)
- v. pokud průsečík leží na referenčním elipsoidu, ukončíme výpočet, jinak pokračujeme
- vi. vybereme dva průsečíky, které jsou nejbližší referenčního elipsoidu
- vii. kružnicový oblouk ohraničený těmito body rozdělíme na polovinu a opakujeme proces od bodu iii.

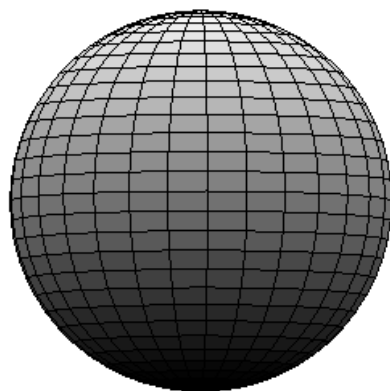
Výpočet ukončíme, pokud vypočtený bod leží na povrchu referenčního elipsoidu, nebo pokud jsou dva následné vypočítané body od sebe blíže než 0,01 m.

Tento postup byl implementován v prostředí Matlab (Příloha 1).

4.2.2 Jeden (referenční) elipsoid – půlení úsečky

Tento postup hledá odrazný bod na povrchu referenčního elipsoidu WGS-84. Jedinými dalšími vstupními daty jsou souřadnice vysílací a přijímací družice (Sada 4) (Obrázek 4.13).

Následující postup jsem představil v roce 2005 (29).

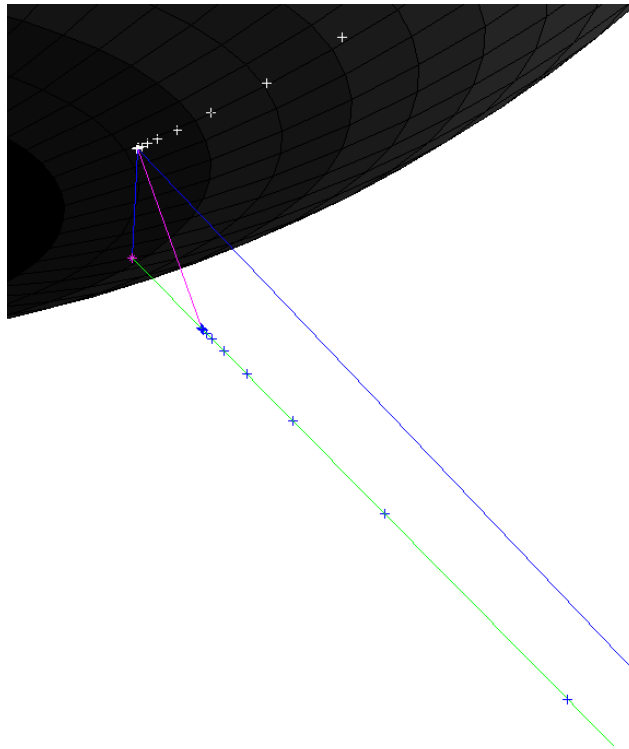


S1

S2

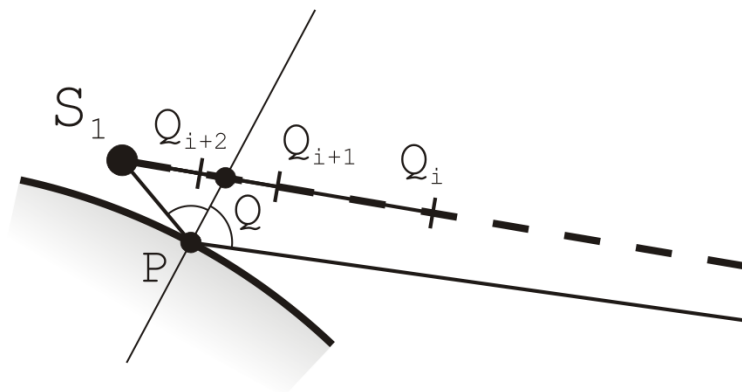
Obrázek 4.13: Referenční elipsoid WGS-84 a poloha přijímací (S_1) a vysílací (S_2) družice.

Základní myšlenkou tohoto postupu je fakt, že vysílací družice S_2 , přijímací družice S_1 , odrazný bod P i kolmice dopadu leží v jedné rovině a samozřejmě že úhel dopadu α a úhel odrazu α' se rovnají. Odrazný bod P hledáme tak, že vybíráme mezilehlé body Q na spojnici vysílací a přijímací družice. Tyto body kolmo promítáme na povrch referenčního elipsoidu a testujeme rozdíl úhlů $d\alpha$ mezi kolmicí v promítnutém bodě a spojnicemi promítnutého bodu s vysílací a přijímací družicí (Obrázek 4.14).



Obrázek 4.14: Ukázka postupu hledání odrazného bodu. Modré křížky jsou vybrané body, bílé pak jejich průměty na referenční elipsoid.

Nejjednodušší způsob, jak vybírat mezilehlé body, je půlení úsečky. Jako základ vezmeme úsečku S_1S_2 . Mezilehlý bod Q_1 pak dělí úsečku S_1S_2 na polovinu. Pokud je $\sphericalangle S_1P_1Q_1 > \sphericalangle S_2P_1Q_1$, dělíme dále úsečku S_1Q_1 , v opačném případě dělíme úsečku S_2Q_1 . Takto postupujeme, dokud není rozdíl úhlů menší než 10^{-9} rad. Poslední promítnutý bod P_i pak prohlásíme za odrazný bod P (Obrázek 4.15).



Obrázek 4.15: Výběr mezilehlých bodů pomocí půlení úsečky.

Kolmý průmět bodů na referenční elipsoid provádíme tak, že pro dané body vypočteme jejich zeměpisné souřadnice $[\varphi, \lambda]$ a příčný poloměr křivosti N , které pak převedeme zpět na kartézské souřadnice $[X, Y, Z]$.

Vyjdeme ze vztahů

$$\begin{aligned} X &= N \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= N \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= N(1 - e^2) \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.24)$$

Zeměpisnou délku λ počítáme pomocí několika vztahů:

Pro výsledné úhly $\lambda \in \langle -180^\circ, -135^\circ \rangle$, $\lambda \in \langle -45^\circ, 45^\circ \rangle$ a $\lambda \in \langle 135^\circ, 180^\circ \rangle$ používáme vztah

$$\tan \lambda = \frac{Y}{X},$$

ostatní úhly pak počítáme ze vztahu

$$\cot \lambda = \frac{X}{Y}.$$

Pomocí vhodných podmínek zajistíme, aby výsledné úhly λ ležely v rozmezí $\langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$.

Zeměpisnou šířku φ počítáme taktéž pomocí několika vztahů.

Pokud je $Z = 0$, je $\varphi = 0$. Pokud je $Z \neq 0$, pokračujeme podle následujících pravidel:

Pro výsledné úhly $\varphi \in \langle -45^\circ, 45^\circ \rangle$ používáme vztah

$$\tan \varphi = \frac{Z \sin \lambda}{Y(1-e^2)},$$

pokud je však $\sin \lambda = 0$, využijeme vztah

$$\tan \varphi = \frac{Z \cos \lambda}{X(1-e^2)}.$$

Ostatní úhly pak počítáme ze vztahu

$$\cot \varphi = \frac{Y(1-e^2)}{Z \sin \lambda}.$$

Pomocí vhodných podmínek zajistíme, aby výsledné úhly φ ležely v rozmezí $\langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$.

Pro výpočet příčného poloměru křivosti N využijeme známý vztah

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

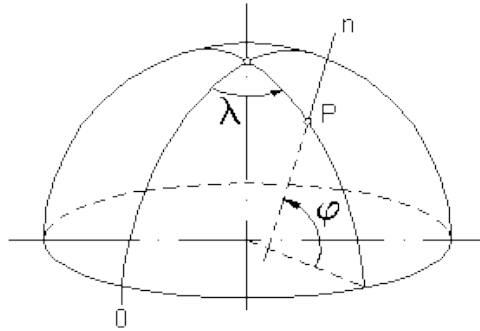
Viz Příloha 2

Pro zpětný převod využijeme vztahy (4.24) (Příloha 3).

Tento postup jsem implementoval v prostředí Matlab (Příloha 4).

Kolmý průmět bodu na referenční elipsoid s využitím příčného poloměru křivosti N

Pro bod P ležící na povrchu referenčního elipsoidu lze z jeho kartézských souřadnic $[X, Y, Z]$ pomocí výše popsaných vztahů vypočítat jeho zeměpisné souřadnice $[\varphi, \lambda]$ a naopak.

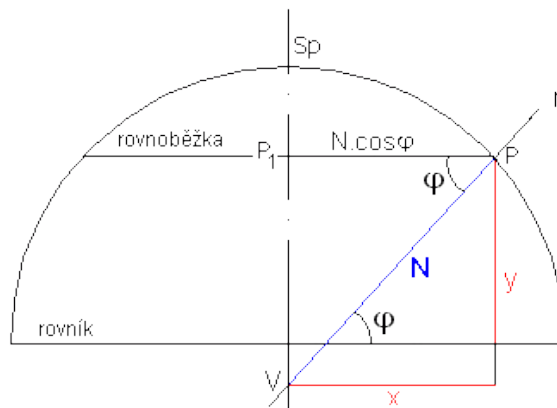


Obrázek 4.16: Geodetická zeměpisná šířka φ a zeměpisná délka λ (34).

Zeměpisná délka λ je úhel, který svírá rovina poledníku procházející bodem P a rovina základního (nultého) poledníku. Rozsah hodnot, které nabývá, je $(-180^\circ, 180^\circ)$. K jeho výpočtu jsou zapotřebí pouze souřadnice $[X, Y]$ (Obrázek 4.16).

Zeměpisná šířka φ je úhel, který svírá normála elipsoidu v bodě P s rovinou rovníku. Rozsah hodnot, které nabývá, je $(-90^\circ, 90^\circ)$. K jeho výpočtu jsou zapotřebí všechny souřadnice $[X, Y, Z]$, resp. souřadnice Z , jedna ze souřadnic $[X, Y]$, hodnota zeměpisné délky λ bodu P a hodnota numerické výstřednosti referenčního elipsoidu.

Z toho lze odvodit, že všechny body ležící na normále elipsoidu v bodě P mají stejné zeměpisné souřadnice $[\varphi, \lambda]$. Bod P ležící na povrchu elipsoidu je pak dourčen velikostí příčného poloměru křivosti N (Obrázek 4.17).



Obrázek 4.17: Příčný poloměr křivosti N (34).

Pokud tedy vypočítáme pro jakýkoliv bod Q nad povrchem referenčního elipsoidu jeho zeměpisné souřadnice $[\varphi, \lambda]$ a velikost příčného poloměru křivosti pro danou normálu, získáme souřadnice $[\varphi, \lambda, N]$ bodu P na povrchu referenčního elipsoidu. Z těchto souřadnic $[\varphi, \lambda, N]$ lze následně pomocí vztahů (4.24) vypočítat kartézské souřadnice $[X, Y, Z]$ bodu P . Bod P je pak kolmým průmětem bodu Q na povrch elipsoidu.

4.2.3 Jeden (referenční) elipsoid – půlení rozdílu úhlů

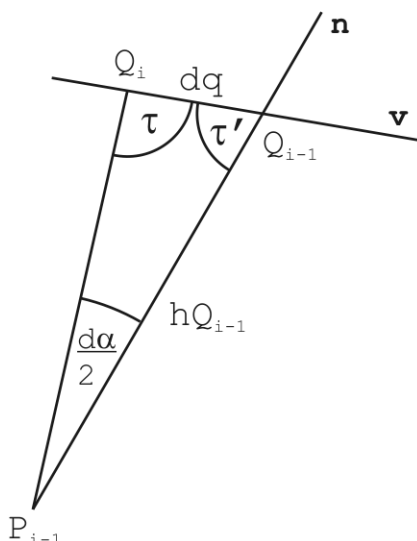
Tento postup vychází ze stejných předpokladů jako postup představený v kapitole 4.2.2., tedy že vysílací družice S_2 , přijímací družice S_1 , odrazný bod P i kolmice dopadu leží v jedné rovině a samozřejmě že úhel dopadu α a úhel odrazu α' se rovnají. Využívá také stejný princip kolmého průmětu bodů na referenční elipsoid. Liší se pouze v metodě výběru mezilehlých bodů na spojnici vysílací a přijímací družice.

V předchozí kapitole jsme mezilehlé body vybírali půlením úsečky. Krajními body úsečky byly body získané v předchozích iteracích. Nyní budeme mezilehlé body vybírat za pomoci půlení rozdílu $d\alpha$ úhlů mezi kolmicí v promítnutém bodě a spojnicí promítnutého bodu s vysílací a přijímací družicí.

První mezilehlý bod úsečky S_1S_2 určíme ze vztahu

$$Q_i = S_1 + \frac{h_1}{h_2}(S_2 - S_1),$$

kde h_1 a h_2 jsou výšky družic S_1 a S_2 nad povrchem referenčního elipsoidu.



Obrázek 4.18: Výběr mezilehlých bodů pomocí půlení rozdílu úhlů.

Další mezilehlé body počítáme pomocí vztahu

$$Q_i = Q_{i-1} \pm dq \frac{(S_2 - S_1)}{|S_2 - S_1|}, \quad (4.25)$$

kde

$$dq = \frac{h_{Q_{i-1}} \sin \frac{d\alpha}{2}}{\sin \tau}$$

kde $\tau = 180^\circ - \frac{d\alpha}{2} - \tau'$, τ' je úhel mezi normálou v bodě P_{i-1} a vektorem $(S_2 - S_1)$ (Obrázek 4.18).

Pokud je $\sphericalangle S_1 P_{i-1} Q_{i-1} > \sphericalangle S_2 P_{i-1} Q_{i-1}$, získá vztah (4.25) tvar

$$Q_i = Q_{i-1} - dq \frac{(S_2 - S_1)}{|S_2 - S_1|},$$

v opačném případě počítáme bod Q_i ze vztahu

$$Q_i = Q_{i-1} + dq \frac{(s_2 - s_1)}{|s_2 - s_1|}.$$

Výpočet končí, pokud je rozdíl úhlů $d\alpha$ menší než 10^{-9} rad.

Pokud je přímá vzdálenost mezi přijímací a vysílací družicí menší než přibližně součet jejich výšek nad povrchem referenčního elipsoidu, sníží se oproti předchozí metodě počet iterací potřebných k vypočtení odrazného bodu (viz Numerický příklad). Pokud je vzdálenost větší, potřebujeme na výpočet více kroků než u předchozí metody.

Tento postup jsem implementoval v prostředí Matlab (Příloha 5). Představil jsem jej v roce 2005 mimo jiné na 25. konferenci o geometrii a počítačové grafice (35).

5 Numerický příklad

Jediná plná sada vstupních dat (Sada 1), kterou máme v současné době k dispozici, pochází z práce Jana Teichmanna (27).

Vstupní data jsou následující:

pozice družic

- $S_1 = [1704270,88; 1037760,88; -6532029,78]$ m
- $S_2 = [13438722,08; 7201125,22; -21772472,43]$ m

délka signálu mezi vysílací a přijímací družicí odraženého od zemského povrchu

- $d_{12} = 21068077,730$ m

poloosy referenčního elipsoidu WGS-84

- $a = 6378137,0$ m
- $b = 6356752,31425$ m

vektor rychlosti přijímací družice S_1

- $\mathbf{u} = (-7,32877; -0,73153; -2,02837)$

úhel mezi vektorem rychlosti přijímací družice a směrem přijatého signálu

- $\theta = 110,67^\circ$

5.1 *Současné geometrické postupy*

Průnik tří kvadrik ve speciální poloze

V tomto případě jsme vypočetli dva body:

- $P_1 = [1748844,45; 1070533,13; -6019298,00]$ m,
- $P_2 = [1754582,37; 1006385,19; -6028624,94]$ m.

Chyba polohy bodů na referenčním elipsoidu byla testována dosazením do jeho středové rovnice $dP = \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1$.

- $dP_1 = 3,6379788071 \cdot 10^{-12}$
- $dP_2 = 1,8189894035 \cdot 10^{-12}$

Vzdálenost dvou elipsoidů

Po 20 iteracích jsme obdrželi dva body, které splňují podmínky

1. $|PP_r|$ je minimální
2. normálové vektory obou elipsoidů v těchto bodech jsou kolineární

Bod ležící na referenčním elipsoidu WGS-84 má souřadnice:

- $P_r = [1736991,57; 1037083,73; -6028516,86]$ m

Bod ležící na elipsoidu odrazných bodů má souřadnice:

- $P = [1736779,95; 1036957,38; -6027777,43]$ m

Elipsoid homotetický k referenčnímu elipsoidu

Po 10 iteracích jsme vypočetli odrazný bod:

- $P = [1736779,77; 1036957,73; -6027777,50]$ m

Geodetické souřadnice tohoto bodu jsou následující:

- $\rho = 6358127,75$ m
- $\varphi = -71^\circ 33' 54''$
- $\lambda = 30^\circ 50' 23''$

Poloosy elipsoidu homotetického k referenčnímu elipsoidu mají velikost:

- $a_h = 6377355,21$ m
- $b_h = 6355937,15$ m

5.2 Vlastní postupy

Průnik tří kvadrik

Tímto postupem jsme vypočetli dva body:

Po 44 krocích jsme vypočetli bod

- $P_1 = [1748844,45; 1070533,13; -6019298,00]$ m,

jehož zeměpisné souřadnice jsou:

- $\varphi = -71^\circ 18' 20,27''$
- $\lambda = 31^\circ 28' 20,50''$.

Po dalších 40 krocích pak bod

- $P_2 = [1754582,38; 1006385,18; -6028624,94]$ m,

jehož zeměpisné souřadnice jsou:

- $\varphi = -71^\circ 34' 05,54''$
- $\lambda = 29^\circ 50' 15,07''$.

Jeden (referenční) elipsoid – půlení úsečky

Tímto postupem jsme ze zadaných hodnot vypočetli odrazný bod:

- $P = [1735273,03; 1036108,47; -6029175,00]$ m

Jeho zeměpisné souřadnice jsou:

- $\varphi = -71^\circ 35' 01,69''$
- $\lambda = 30^\circ 50' 27,11''$.

K vypočtení tohoto bodu jsme potřebovali 34 kroků.

Rozdíl úhlu dopadu a odrazu ve vypočteném bodě je $1,072 \cdot 10^{-10}$ rad.

Rozdíl vypočteného bodu a předchozí iterace je 0,001 m.

Jeden (referenční) elipsoid – půlení rozdílu úhlů

Tímto postupem jsme ze zadaných hodnot vypočetli odrazný bod:

- $P = [1735273,02; 1036108,47; -6029175,00]$ m

Jeho zeměpisné souřadnice jsou:

- $\varphi = -71^\circ 35' 01,69''$
- $\lambda = 30^\circ 50' 27,11''$.

K vypočtení tohoto bodu jsme potřebovali 9 kroků.

Rozdíl úhlu dopadu a odrazu ve vypočteném bodě je $-3,178 \cdot 10^{-10}$ rad.

Rozdíl vypočteného bodu a předchozí iterace je 0,001 m.

Závěr

Bistatická altimetrie budí dojem slibné metody pro získávání nových dat o zemském tělese a zpřesňování dat již známých. Díky zpracovávání signálů z družic globálních navigačních systémů odražených od povrchu zemského tělesa nabízí vyšší hustotu bodů než klasická družicová altimetrie. Z charakteru přijatého signálu lze zjistit vlastnosti povrchu, od něž se signál odrazil. Lze tak sledovat např. vývoj ledovcové pokrývky nebo zalesnění. Nespornou výhodou je, že družice pro bistatickou altimetrii nepotřebuje (na rozdíl od družicové altimetrie) žádný vlastní vysílač signálu.

V této práci bylo představeno několik metod pro nalezení odrazného bodu na zemském tělese, resp. referenčním elipsoidu nahrazující zemské těleso. Většina těchto metod byla vytvořena pro jiný soubor vstupních dat a využívá specifických vlastností daných právě souborem vstupních dat. Proto je nelze vzájemně porovnávat (resp. nelze porovnávat výsledky numerického příkladu).

Jedinými metodami, jejichž výsledky numerického příkladu lze srovnat, jsou metody „Průnik tří kvadrik ve speciální poloze“ doc. Kočandrlové a moje metoda „Průnik tří kvadrik“, a dvě verze méj metody „Jeden (referenční) elipsoid“.

Vzdálenosti bodů P_1 a P_2 vypočítané doc. Kočandrlovou a mnou jsou $dP_1 = 0,00$ m a $dP_2 = 0,01$ m (počítáno z výsledků uvedených v kapitole 5).

Vzdálenost odrazných bodů P vypočítaných metodami popsány v kapitolách 4.2.2 a 4.2.3 je $dP = 0,01$ m. Metoda půlení rozdílů úhlů je v tomto konkrétním případě znatelně rychlejší při vypočtení téměř identického bodu. Jak však bylo zmíněno v kapitole 4.2.3, závisí počet iterací na přímé vzdálenosti přijímací a vysílací družice. Pokud je přímá vzdálenost družic přibližně rovna součtu jejich výšek nad referenčním elipsoidem, je počet iterací obou metod přibližně stejný. Čím je tato vzdálenost kratší, tím větší je rozdíl v počtu iterací ve prospěch metody půlení rozdílů úhlů. Naopak, čím delší je tato vzdálenost, tím větší je rozdíl v počtu iterací v neprospěch metody půlení rozdílů úhlů. Počet iterací metody půlení úsečky se přitom pro různé přímé vzdálenosti družic liší jen velmi málo.

Za povšimnutí také stojí vzdálenost bodu P na elipsoidu odrazných bodů vypočtený metodou „Vzdálenost dvou elipsoidů“ (kapitola 4.1.2) a bodu P vypočteného metodou „Elipsoid homotetický k referenčnímu elipsoidu“ (kapitola 4.1.3). Tyto dva body jsou totiž počítány podobným způsobem. Rozdíl 0,40 m je v tomto případě v podstatě zanedbatelný.

Nejvhodnější pro praktické využití se jeví metoda nazvaná „Elipsoid homotetický k referenčnímu elipsoidu“. Především proto, že odrazný bod nepočítá na referenčním elipsoidu, ale primárně ze zadané délky dráhy odraženého signálu.

Části této práce byly podpořeny grantem FRVŠ G1 392/2005 „Určování odrazných bodů na zemském tělese“ a grantem SGS ČVUT 2010 OHK1-062/10 „Matematické modelování vybraných úloh ve stavebnictví“.

Použitá literatura

1. Altimetry. [Online] Aviso User Service.
<http://www.aviso.oceanobs.com/en/altimetry/>.
2. Ocean Surface Topology from Space: Technology. [Online] NASA Jet Propulsion Technology: California Institute of Technology.
<http://sealevel.jpl.nasa.gov/technology/technology.html>.
3. Doris, the space surveyor. [Online] Aviso User Service.
<http://www.aviso.oceanobs.com/en/doris/>.
4. Global Positioning System. [Online] Wikipedie, 11. září 2010.
http://cs.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System.
5. **Grewal, S. M.; Weill, R. L.; Andrews, P. A.** *Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration*. New York : Wiley, 2001. ISBN 0471-35032-X.
6. Factsheets: Global Positioning System. [Online] Los Angeles Air Force Base, leden 2010. <http://www.losangeles.af.mil/library/factsheets/factsheet.asp?id=5325>.
7. **Hana, P. D.** Global Positioning System Overview. [Online] Department of Geography, University of Texas at Austin, 2000.
<http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps.html>.
8. GLONASS status. [Online] Federal Space Agency: Information-Analytical Centre, 9. září 2010. <http://www.glonass-ianc.rsa.ru/pls/htmldb/f?p=202:20:2271275983214791::NO>.
9. GLONASS. [Online] Wikipedia, 9. září 2010.
<http://en.wikipedia.org/wiki/GLONASS>.
10. GLONASS. [Online] Wikipedie, 22. července 2010.
<http://cs.wikipedia.org/wiki/GLONASS>.
11. Komponenty systému Galileo. [Online] Česká kosmická kancelář, 20. listopadu 2006. <http://www.czechspace.cz/cs/galileo/technologie>.
12. Navigační systém Galileo. [Online] Wikipedie, 9. září 2010.
http://cs.wikipedia.org/wiki/Navigační_systém_Galileo.
13. ESA: Galileo Navigation. *ESA - Navigation - The future - Galileo*. [Online] ESA, 12. května 2010. <http://www.esa.int/esaNA/galileo.html>.
14. Galileo. *Satellite Navigation: Galileo*. [Online] Commission's Directorate General for Enterprise and Industry. [Citace: 12. září 2010.]
http://ec.europa.eu/enterprise/policies/satnav/galileo/index_en.htm.
15. Navigační systém Compass. [Online] Česká kosmická kancelář, 25. ledna 2007.
<http://www.czechspace.cz/cs/galileo/aktuality-GPS-Glonass/Beidou>.
16. Compass (BeiDou 2) Satellite Navigation System. [Online] SinoDefence.com - The Chinese Military in the 21st Century, 3. června 2010.
<http://www.sinodefence.com/space/spacecraft/beidou2.asp>.

17. Compass navigation system. [Online] Wikipedia, 22. srpna 2010.
http://en.wikipedia.org/wiki/Compass_navigation_system.
18. *A passive reflectometry system: Application to ocean altimetry*. **Martín-Neira, M.** 1993, ESA Journal 17, stránky 331-356.
19. *Reflection Altimetry for oceanography and geodesy*. **Wagner, C.; Klokočník, J.** Mar del Plata, Argentina : ., 2001. An Ocean Odyssey, IAPSO-IABO Symp.: Gravity, Geoid and Ocean Circulation as Inferred from Altimetry.
20. *The value of ocean reflections of GPS signals to enhance satellite altimetry: data distribution and error analysis*. **Wagner, C.; Klokočník, J.** Berlin/Heidelberg : Springer, 2003, J. of Geodesy, Sv. 77, stránky 128-138. ISSN 0949-7714.
21. *Geometry and accuracy of reflecting points in bistatic satellite altimetry*. **Kostecký, J.; Klokočník, J.; Wagner, C.** Berlin/Heidelberg : Springer, 2005, J. of Geodesy, Sv. 79, stránky 421-430. ISSN 0949-7714.
22. *Geometrický model úlohy GPS-altimetrie*. **Kočandrlová, M.** Praha : JČMF, 2002. Sborník 27. konference VŠTEZ. stránky 110-113.
23. *GNSS-R: Geometry and Coverage*. **D'Addio, S., Buck, Ch., Martín-Neira, M.** Noordwijk, Netherlands : ESA/ESTEC, 2008. Workshop GNSS-R'08 presentation.
24. *GNSS-R: Overview of Other Applications*. **Buck, Ch.** Noordwijk, Netherlands : ESA/ESTEC, 2008. Workshop GNSS-R'08 presentation.
25. *PARIS In Orbit Demonstrator Part 3: Geometry, Ionospheric Correction, Instrument Design, On-board Calibration, Performance*. **Martín-Neira, M.; D'Addio, S.; Buck, Ch.** Noordwijk, Netherlands : ESA/ESTEC, 2008. Workshop GNSS-R'08 presentation.
26. *PARIS In Orbit Demonstrator Part 1: Objectives, System Concept, Budgets*. **Buck, Ch., D'Addio, S., Martín-Neira, M.** Noordwijk, Netherlands : ESA/ESTEC, 2008. Workshop GNSS-R'08 presentation.
27. **Teichmann, J.** *GPS Altimetrie - Bistatická GPS altimetrie projektu CHAMP*. Institut fuer Planetare Geodesie, Technische Universitaet Dresden. 2000. semestrální práce z předmětu Geodynamika.
28. *Position of Reflecting Points in Bistatic Satellite Altimetry: Theoretical Solutions for Ellipsoid*. **Olivík, S.; Kočandrlová, M.; Kostecký, J.; Klokočník, J.** Strasbourg Ceres : European Geosciences Union, 2006. Geophysical Research Abstracts. Sv. 8. ISSN 1029-7006.
29. *Odrasný bod bistatické altimetrie na ploše elipsoidu*. **Olivík, S.** Praha : JČMF a FSv ČVUT v Praze, 2005. Sborník Semináře Matematika na vysokých školách (Determinismus a chaos). stránky 155-156. ISBN 80-01-03269-8.
30. *Three geometrical approaches to the bi-static altimetry on the ellipsoid*. **Kočandrlová, M.; Olivík, S.** Noordwijk, Netherlands : ESA/ESTEC, 2008. Workshop GNSS-R'08 presentation.
31. *Středy normálových křivostí elipsoidu v modelu bistatické altimetrie*. **Kočandrlová, M.** Bratislava : Slovak University of Technology, 2005. Proceedings of SCG'2005. Sv. 14, stránky 37-41. ISBN 80-227-2278-2.

32. *Elipsoid homotetický k referenčnímu elipsoidu*. **Kočandřlová, M.** Praha : JČMF, 2005. Sborník 25. konference o geometrii a počítačové grafice. stránky 111-116.

33. *Výpočet odrazného bodu na zemském povrchu pro GPS-altimetrii*. **Olivík, S.** Ostrava : VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2004. Geometrie a počítačová grafika 2004. stránky 150-155. ISBN 80-248-0581-2.

34. **Čepičková, M.** Matematická kartografie - Multimediální výukové texty. [Online] Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni. http://gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni_texty/index_soubory/index.html.

35. *Porovnání dvou metod hledání odrazného bodu na povrchu elipsoidu*. **Olivík, S.** Praha : JČMF, 2005. Sborník 25. konference o geometrii a počítačové grafice. stránky 175-180. ISBN 80-7015-013-0.

Přílohy

Příloha 1: Průnik tří kvadrik

```
clear all
global WGS_a
global WGS_e
format long g

WGS_a=6378137.000;
WGS_b=6356752.31425;
WGS_ab=sqrt(WGS_a^2*WGS_b^2);
WGS_e=sqrt((WGS_a^2-WGS_b^2)/WGS_a^2);

GPS=[13438722.08, 7201125.22, -21772472.43];
CHAMP=[1704270.88, 1037760.88, -6532029.78];
vektor=[-7328.77, -731.53, -2028.37];
delka_d=21068077.73;
velke_theta=110.67*pi/180;

% vypocet elipsoidu odraznych bodu
el_stred=(GPS+CHAMP)/2;
el_f=norm(GPS-el_stred);
el_a=delka_d/2;
el_b=sqrt((el_a)^2-(el_f)^2);

% vypocet transformace elipsoidu
delta_elx=GPS-CHAMP;
delta_ely=cross(delta_elx, vektor);
delta_elz=cross(delta_elx, delta_ely);
delta_elxn=delta_elx./norm(delta_elx);
delta_elyn=delta_ely./norm(delta_ely);
delta_elzn=delta_elz./norm(delta_elz);
A=[delta_elxn; delta_elyn; delta_elzn];

% vypocet rotacni kuzelove plochy
vektor_x=vektor;
vektor_y=cross((GPS-CHAMP), vektor);
vektor_z=cross(vektor_x, vektor_y);
vektor_xn=vektor_x./norm(vektor_x);
vektor_yn=vektor_y./norm(vektor_y);
vektor_zn=vektor_z./norm(vektor_z);

% vypocet transformaci
B=[vektor_xn; vektor_yn; vektor_zn];
C=B/(A);

% inicializace
konec=false;
dva_int=false;
prvni=false;
druhy=false;
prunik_01=zeros(1, 3);
```

```

prunik_A=[0, 0, 0];
prunik_B=[0, 0, 0];
prunik_C=[0, 0, 0];
prunik_D=[0, 0, 0];
bod_kruh_zmssw=zeros(4, 3);
delka_kruh_1=1e+30;
delka_kruh_2=1e+30;
parametr_01=0;
parametr_02=0;
okraj_1=0;
okraj_2=0;
okraj_3=0;
delka_1=0;
delka_2=0;
delka=0;
ca=WGS_a^2;
cb=WGS_b^2;

% pocitani pruniku kuzelove plochy a elipsoidu
for h=1:1:4 % pocitani pocatecniho intervalu
    if velke_theta*180/pi > 90
        xs=-1000000;
    else
        xs=1000000;
    end
    ys=1000000*tan(velke_theta)*cos(h*pi/2);
    zs=1000000*tan(velke_theta)*sin(h*pi/2);
    bod_kruh_zsse=[xs ys zs]*C;
% prunik kuzele a elipsoidu

pa=bod_kruh_zsse(1)^2*el_b^2+bod_kruh_zsse(2)^2*el_a^2+bod_kruh
_zsse(3)^2*el_a^2;
pb=2*bod_kruh_zsse(1)*el_b^2*el_f;
pc=el_b^2*el_f^2-el_a^2*el_b^2;
pd=pb^2-4*pa*pc;
parametr_01_1=(pb+sqrt(pd))/(2*pa);
if parametr_01_1 > 0
    parametr_01=parametr_01_1;
else
    parametr_01_2=(pb-sqrt(pd))/(2*pa);
    if parametr_01_2 > 0
        parametr_01=parametr_01_2;
    end
end
    bod_kruh_zssw=bod_kruh_zsse*parametr_01*A+CHAMP;
% konec pruniku povrsky kuzele a elipsoidu
for k=1:3
    bod_kruh_zmssw(h,k)=bod_kruh_zssw(k);
end

delka_kruh=((bod_kruh_zssw(1)^2+bod_kruh_zssw(2)^2)*cb)+((bod_k
ruh_zssw(3)^2)*ca);
    if delka_kruh < delka_kruh_1 % test ktery z bodu je
nejblize elipsoidu WGS
        if (delka_kruh_1-delka_kruh) > (delka_kruh_2-
delka_kruh)

```

```

        okraj_1=h*pi/2;
        delka_kruh_1=delka_kruh;
        bod_1=bod_kruh_zssw;
    else
        okraj_2=h*pi/2;
        delka_kruh_2=delka_kruh;
        bod_2=bod_kruh_zssw;
    end
elseif delka_kruh < delka_kruh_2
    if (delka_kruh_1-delka_kruh) > (delka_kruh_2-
delka_kruh)
        okraj_1=h*pi/2;
        delka_kruh_1=delka_kruh;
        bod_1=bod_kruh_zssw;
    else
        okraj_2=h*pi/2;
        delka_kruh_2=delka_kruh;
        bod_2=bod_kruh_zssw;
    end
end
end
% konec testu ktery z bodu
je nejblize elipsoidu WGS
end
delka1=(bod_1(1)^2+bod_1(2)^2)*cb+(bod_1(3)^2)*ca;
delka2=(bod_2(1)^2+bod_2(2)^2)*cb+(bod_2(3)^2)*ca;
if delka_1 < delka_2
    pomoc_bod=bod_1;
else
    pomoc_bod=bod_2;
end
parametr_02=(okraj_1+okraj_2)/2;

pocet_kroku_x=0;

while not(konec)
    % pocitani pruseciku kuzele s elipsoidem
    if velke_theta*180/pi > 90
        xs=-1000000;
    else
        xs=1000000;
    end
    ys=1000000*tan(velke_theta)*cos(parametr_02);
    zs=1000000*tan(velke_theta)*sin(parametr_02);
    bod_kruh_zsse=[xs ys zs]*C;
    % prunik kuzele a elipsoidu

pa=bod_kruh_zsse(1)^2*el_b^2+bod_kruh_zsse(2)^2*el_a^2+bod_kruh
_zsse(3)^2*el_a^2;
pb=2*bod_kruh_zsse(1)*el_b^2*el_f;
pc=el_b^2*el_f^2-el_a^2*el_b^2;
pd=pb^2-4*pa*pc;
parametr_01_1=(pb+sqrt(pd))/(2*pa);
if parametr_01_1 > 0
    parametr_01=parametr_01_1;
else
    parametr_01_2=(pb-sqrt(pd))/(2*pa);
    if parametr_01_2 > 0

```

```

        parametr_01=parametr_01_2;
    end
end
bod=bod_kruh_zsse*parametr_01*A+CHAMP;
% konec pocitani pruseciku kuzele s elipsoidem

% pocitani pruseciku vsech tri kvadrik
delka=(bod(1)^2+bod(2)^2)*cb+(bod(3)^2)*ca;
if dva_int
    if druhy
        if norm(bod-pomoc_bod) > 0.01
            if abs(delka_2-delka) > abs(delka_1-delka)
                delka_2=delka;
                okraj_2=parametr_02;
            else
                delka_1=delka;
                okraj_1=parametr_02;
            end
            parametr_02=(okraj_1+okraj_2)/2;
        else
            prunik_C=bod
            pocet_kroku_C=pocet_kroku_x
            konec=true;
        end
    else % if not druhy
        if prvni
            if (delka-ca*cb) == 0
                prunik_B=bod
                pocet_kroku_B=pocet_kroku_x
                okraj_2=parametr_02;
                druhy=true;
                parametr_02=(okraj_1+okraj_2)/2;
            else
                if delka < ca*cb
                    okraj_3=parametr_02;
                else
                    okraj_2=parametr_02;
                end
                parametr_02=(okraj_2+okraj_3)/2;
            end
        else % if not prvni
            if (delka-ca*cb) == 0
                prunik_A=bod
                pocet_kroku_A=pocet_kroku_x
                okraj_1=parametr_02;
                prvni=true;
                parametr_02=(okraj_2+okraj_3)/2;
            else
                if delka < ca*cb
                    okraj_3=parametr_02;
                else
                    okraj_1=parametr_02;
                end
                parametr_02=(okraj_1+okraj_3)/2;
            end
        end
    end % if prvni
end

```

```

        end      % if druhy
    else      % if not dva_int
        if norm(bod-pomoc_bod) > 0.01
            if (delka-ca*cb) == 0
                prunik_A=bod
                pocet_kroku_A=pocet_kroku_x
                prvni=true;
                dva_int=true;
                okraj_1=parametr_02;
                okraj_3=parametr_02;
                parametr_02=(okraj_2+okraj_3)/2;
            else
                if delka < ca*cb
                    dva_int=true;
                    okraj_3=parametr_02;
                    parametr_02=(okraj_1+okraj_3)/2;
                else
                    if abs(delka_2-delka) < abs(delka_1-delka)
                        delka_2=delka;
                        okraj_2=parametr_02;
                    else
                        delka_1=delka;
                        okraj_1=parametr_02;
                    end
                    parametr_02=(okraj_1+okraj_2)/2;
                end
            end
        end
    else
        prunik_D=bod
        pocet_kroku_D=pocet_kroku_x
        konec=true;
    end
end      % if dva_int
pocet_kroku_x=pocet_kroku_x+1;
pomoc_bod=bod;
end

prunik=zeros(1, 3);
q=0;
format long g
if norm(prunik_A) > 0
    dA=(prunik_A(1)^2+prunik_A(2)^2)*cb+(prunik_A(3)^2)*ca-
ca*cb
    q=q+1;
    prunik(q,:)=prunik_A;
    [fi_A, lam_A, N_A]=cart2eli(prunik_A);
    fiA=fi_A*180/pi
    lamA=lam_A*180/pi
end
if norm(prunik_B) > 0
    dB=(prunik_B(1)^2+prunik_B(2)^2)*cb+(prunik_B(3)^2)*ca-
ca*cb
    q=q+1;
    prunik(q,:)=prunik_B;
    [fi_B, lam_B, N_B]=cart2eli(prunik_B);
    fiB=fi_B*180/pi

```

```

    lamB=lam_B*180/pi
end
if norm(prunik_C) > 0
    dC=(prunik_C(1)^2+prunik_C(2)^2)*cb+(prunik_C(3)^2)*ca-
ca*cb
    save prunik_nejblizsi.txt prunik_C -ASCII
    [fi_C, lam_C, N_C]=cart2eli(prunik_C);
    fiC=fi_C*180/pi
    lamC=lam_C*180/pi
end
if norm(prunik_D) > 0
    dD=(prunik_D(1)^2+prunik_D(2)^2)*cb+(prunik_D(3)^2)*ca-
ca*cb
    save prunik_nejblizsi.txt prunik_D -ASCII
    [fi_D, lam_D, N_D]=cart2eli(prunik_D);
    fiD=fi_D*180/pi
    lamD=lam_D*180/pi
end

if norm(prunik) > 0
    save prunik.txt prunik -ASCII
end

```

Příloha 2: Převod z kartézských do zeměpisných souřadnic

```
function [fi,lamb,N] = cart2eli(Q)
global WGS_a
global WGS_e
format long g

if Q(2) == 0
    if Q(1) >= 0
        lamb=0;
    else
        lamb=pi;
    end
else
    if Q(1) == 0
        if Q(2) > 0
            lamb=pi/2;
        else
            lamb=-pi/2;
        end
    else
        if abs(Q(2)/Q(1)) <= 1
            lamb=atan2(Q(2), Q(1));
        else
            lamb=acot(Q(1)/Q(2));
            if Q(1) > 0
                if Q(2) > 0
                    if lamb < 0
                        lamb=-lamb;
                    end
                    if lamb > pi/2
                        lamb=pi-lamb;
                    end
                else
                    if lamb > 0
                        lamb=-lamb;
                    end
                    if lamb < -pi/2
                        lamb=-pi-lamb;
                    end
                end
            end
        else
            if Q(2) > 0
                if lamb < pi/2
                    lamb=pi-lamb;
                end
                if lamb > pi
                    lamb=2*pi-lamb;
                end
            else
                if lamb > -pi/2
                    lamb=-pi-lamb;
                end
                if lamb < -pi
```

```

                                lamb=-2*pi-lamb;
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end

if Q(3) == 0
    fi=0;
else
    if (Q(1) == 0) && (Q(2) == 0)
        if Q(3) > 0
            fi=pi/2;
        else
            fi=-pi/2;
        end
    else
        if (Q(3)*sin(lamb)) == 0
            fi=atan((Q(3)*cos(lamb))/Q(1)*(1-WGS_e^2));
        else
            if abs((Q(3)*sin(lamb))/(Q(2)*(1-WGS_e^2))) <= 1
                fi=atan((Q(3)*sin(lamb))/Q(2)*(1-WGS_e^2));
            else
                fi=acot(Q(2)*(1-WGS_e^2)/(Q(3)*sin(lamb)));
            end
        end
    end
end
end

N=WGS_a/sqrt(1-(WGS_e^2*(sin(fi))^2));

```

Příloha 3: Převod ze zeměpisných do kartézských souřadnic

```
function Q = eli2cart(fi,lamb,N)
global WGS_e
format long g

Q(1)=N*cos(fi)*cos(lamb);
Q(2)=N*cos(fi)*sin(lamb);
Q(3)=N*(1-WGS_e^2)*sin(fi);
```

Příloha 4: Jeden (referenční) elipsoid – půlení úsečky

```
clear all
global WGS_a
global WGS_e
format long g

WGS_a=6378137.000;
WGS_b=6356752.31425;
WGS_e=sqrt((WGS_a^2-WGS_b^2)/WGS_a^2);

GPS=[13438722.08,7201125.22,-21772472.43];
CHAMP=[1704270.88,1037760.88,-6532029.78];

vec=GPS-CHAMP;
pocet_kroku=1;
q=1/2;
S=CHAMP+q*vec;
[fi_P,lam_P,N_P]=cart2eli(S);
P=eli2cart(fi_P,lam_P,N_P);
rozdil=(subspace((CHAMP-P)',(S-P)')-subspace((GPS-P)',(S-P)'));
while abs(rozdil) > 1e-009
    P_prev=P;
    if rozdil > 0
        q=q-(1/(2^pocet_kroku));
    else
        q=q+(1/(2^pocet_kroku));
    end
    S=CHAMP+q*vec;
    [fi_P,lam_P,N_P]=cart2eli(S);
    P=eli2cart(fi_P,lam_P,N_P);
    rozdil=(subspace((CHAMP-P)',(S-P)')-subspace((GPS-P)',
(S-P)'));
    pocet_kroku=pocet_kroku+1;
end

P
rozdil
dP=abs(norm(P-P_prev))
fi=fi_P*180/pi
lambda=lam_P*180/pi
pocet_kroku
```

Příloha 5: Jeden (referenční) elipsoid – půlení rozdílu úhlů

```
clear all
global WGS_a
global WGS_e
format long g

WGS_a=6378137.000;
WGS_b=6356752.31425;
WGS_e=sqrt((WGS_a^2-WGS_b^2)/WGS_a^2);

GPS=[13438722.08, 7201125.22, -21772472.43];
CHAMP=[1704270.88, 1037760.88, -6532029.78];

[fi_T1, lam_T1, N_T1]=cart2eli(CHAMP);
T1=eli2cart(fi_T1, lam_T1, N_T1);
[fi_T2, lam_T2, N_T2]=cart2eli(GPS);
T2=eli2cart(fi_T2, lam_T2, N_T2);
l1=norm(CHAMP-T1);
l2=norm(GPS-T2);

vec=GPS-CHAMP;
pocet_kroku=1;
q=l1/l2;
S=CHAMP+q*vec;
[fi_P, lam_P, N_P]=cart2eli(S);
P=eli2cart(fi_P, lam_P, N_P);
SP=S-P;
lS=norm(SP);

rozdil=(subspace((CHAMP-P)', (SP)')-subspace((GPS-P)', (SP)'));
tauA=abs(subspace((vec)', (SP)'));
tau=pi-tauA-(rozdil/2);
while abs(rozdil) > 1e-009
    P_prev=P;
    dq=(lS*sin(rozdil/2)/sin(tau))/norm(vec);
    if rozdil > 0
        q=q+dq;
    else
        q=q-dq;
    end
    S=CHAMP+q*vec;
    [fi_P, lam_P, N_P]=cart2eli(S);
    P=eli2cart(fi_P, lam_P, N_P);
    SP=S-P;
    lS=norm(SP);
    uhel1=subspace((CHAMP-P)', (SP)');
    uhel2=subspace((GPS-P)', (SP)');
    rozdil=(uhel1-uhel2);
    tauA=abs(subspace((vec)', (SP)'));
    if uhel2 > uhel1
        tau=pi-tauA-(rozdil/2);
    else
        tau=pi+tauA-(rozdil/2);
    end
end
```

```
        end
        pocet_kroku=pocet_kroku+1;
end

P
rozdil
dP=abs(norm(P-P_prev))
fi=fi_P*180/pi
lambda=lam_P*180/pi
pocet_kroku
```